

UNIVERSIDAD CAMILO JOSÉ CELA
FACULTAD DE EDUCACIÓN



Tesis doctoral

**Errores matemáticos en los libros de texto
de Matemáticas de sexto curso de
Educación Primaria de Singapur.
Una ventana abierta a una nueva forma de enseñar
matemáticas**

Autor:
Sergio Urbano Ruiz

Directoras:
Dra. D.^a Presentación Ángeles Caballero-García
Dra. D.^a María Pilar Fernández Palop

Madrid, 2017

UNIVERSIDAD CAMILO JOSÉ CELA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL

**Errores matemáticos
en los libros de texto de Matemáticas
de sexto curso de Educación Primaria de
Singapur.**

**Una ventana abierta
a una nueva forma de enseñar matemáticas**

Autor:
Sergio Urbano Ruiz

Directoras:
Dra. D.^a Presentación Ángeles Caballero-García
Dra. D.^a María Pilar Fernández Palop

Madrid, 2017

A Rocío y Melian

Agradecimientos

Me siento de forma natural inclinado a comenzar este apartado de agradecimientos dirigiéndome a mis directoras de tesis. Es posible que con la asignación de directores suceda lo mismo que con papá y mamá: a todos los niños les han tocado los mejores del mundo. No sé cuál puede ser la probabilidad de que realmente sean las mejores del mundo, pero se me hace muy difícil imaginar a nadie mejor. Me siento muy afortunado por haber trabajado con ellas y agradezco infinitamente su apoyo, su consejo y todo lo que he aprendido gracias al tiempo que me han dedicado.

A Rocío quiero agradecerle la paciencia que ha tenido, y que a veces le costó encontrar, después de muchas jornadas sin poder contar conmigo todo lo que ella necesitaba. Y, por supuesto, a Melian. Ningún niño de 0-30 meses hace conscientemente que sea posible que un progenitor suyo desarrolle una tesis. Melian solamente lo ha puesto un poco difícil.

A muchas personas tengo que agradecer que hayan sabido entender que mi compromiso para con este trabajo me ha tenido que privar de participar en situaciones ordinarias y especiales, y en las raras veces que me he dejado ver han tenido que soportar mi perorata monocorde sobre los errores de Singapur, porque ocupaba prácticamente todo el espacio en mi vida. Entre esas personas se encuentra toda mi familia, especialmente mis padres, a los que no he podido visitar con la frecuencia que merecen, Juan Manuel, Patricia, Moni, Espe, Ra, Jaime, Maya, David y Patricia. Os quiero dar las gracias además por los ánimos que me habéis prestado continuamente en estos años. Pero también a mis amigos, Inés, Bimbo, Víctor, Marta, Angel Luis, Esta Mujer, Borja, Efi, Raquel, Fernando, Cris y Berni, que desde una perspectiva ajena a la investigación académica a menudo encontraron algún consejo que ofrecerme y siempre se interesaron por mi estado de salud física y mental en este largo periodo de intenso trabajo.

También agradezco mucho a Sagri su ofrecimiento desinteresado de revisión del texto, pues su contribución ha sido claramente visible. Y a mi buen amigo Enrique y mi destacado alumno Arnulfo por su ayuda en la edición de imágenes, de lo que tanto tengo que aprender.

Aparte, también me gustaría expresar mi gratitud a otras personas e instituciones por su colaboración desinteresada.

A la Universidad Camilo José Cela, por llevar a cabo este programa de doctorado en el que he tenido el privilegio de participar.

A Fernando Blázquez, Daniel Zanón y, María del Carmen Muñoz por ayudarme en las tareas más delicadas del tratamiento de los datos.

Al Doctor Yeap Ban Har, por haberme respondido a las preguntas que le he formulado de una forma eficaz y cercana, y al Ministerio de Educación de Singapur por haber tenido en cuenta mis peticiones, algunas de ellas que por desconocimiento mío contravenían leyes locales.

A los colegios públicos de Singapur, por contestar amablemente a mis correos electrónicos y orientarme en la búsqueda de información.

Ahora que este camino toca a su fin, es imposible no echar la vista atrás y apenas recordar a la persona que lo empezó. Pero aunque es difícil hacer un recuento exhaustivo de todas las personas que han hecho posible este cambio en mí y la redacción de estas líneas, y probablemente haya alguien más que tenga derecho a reclamar su justo lugar en ellas, mi agradecimiento será en persona. Quizá no sea lo mismo, pero también es importante.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL

PARTE I. INTRODUCTORIA	33
1. Introducción.....	35
PARTE II. TEÓRICA	43
2. Los programas de evaluación internacional.....	45
2.1. Progress in International Reading Literacy Study (PIRLS).....	48
2.2. Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS).....	54
2.3. Programme for International Student Assessment (PISA).....	67
2.4. Resumen y conclusiones.....	73
3. Singapur: aspectos contextuales y educativos.....	79
3.1. Geografía, historia y sociedad de Singapur.....	79
3.2. Sistema educativo de Singapur.....	95
3.3. El currículo de Matemáticas de 6.º curso de Singapur.....	117
3.4. Resumen y conclusiones.....	135
4. Recursos didácticos para la enseñanza matemática.....	137
4.1. Los libros de texto como recurso didáctico.....	144
4.2. Errores en los libros de texto.....	155
4.3. Resumen y conclusiones.....	158
PARTE III. EMPÍRICA	161
5. Antecedentes.....	163
6. Planteamiento del problema.....	167
6.1. Pregunta de investigación.....	168
6.2. Objetivos de la investigación.....	171
6.3. Variables que intervienen en la investigación.....	171
7. Metodología de la investigación.....	181
7.1. Población y muestra.....	182
7.2. Instrumentos.....	187
7.3. Procedimiento de recogida de datos.....	188
7.4. Análisis de datos.....	193
8. Resultados.....	197
8.1. Descripción de la distribución de los errores matemáticos.....	198
8.2. Clasificación de los errores matemáticos.....	212
8.3. Análisis de las relaciones entre las clases de errores matemáticos.....	283
9. Discusión.....	299
9.1. Descripción de la distribución de los errores matemáticos.....	300
9.2. Clasificación de los errores matemáticos.....	303
9.3. Análisis de las relaciones entre las clases de errores matemáticos.....	306
PARTE IV. FINAL	321
10. Conclusiones.....	323
11. Limitaciones.....	327
12. Prospectiva.....	331
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	383
Referencias bibliográficas.....	385

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Posiciones de Singapur en las ediciones en que ha participado de TIMSS y PISA.....	74
Tabla 2. Escaños y porcentaje de votos obtenidos por el PAP en las elecciones parlamentarias desde 1959 en Singapur.....	89
Tabla 3. Variación del Producto Interior Bruto y de la renta per cápita en porcentaje entre los años 2010 y 2015.....	92
Tabla 4. Bloques y contenidos del currículo de Matemáticas de 6.º curso de Primaria.....	122
Tabla 5. Clasificación de recursos didácticos por soporte y por objetivo.....	140
Tabla 6. Variables de posición.....	173
Tabla 7. Variables de área.....	175
Tabla 8. Variables de propósito.....	176
Tabla 9. Variables de error matemático.....	179
Tabla 10. Probabilidad de que un suceso salga 52 veces en 52 experimentos en base a la probabilidad de ese suceso.....	185
Tabla 11. Bloques de contenido y conceptos.....	191
Tabla 12. Frecuencias y porcentajes de la variable Libro.....	199
Tabla 13. Número, porcentaje del Libro y porcentaje del total de errores por Capítulo.....	200
Tabla 14. Frecuencias y porcentajes de la variable Bloque-Capítulo.....	201
Tabla 15. Frecuencias y porcentajes del cruce de las variables Bloque-Capítulo y Libro (solo datos válidos).....	202
Tabla 16. Promedio de errores por página en cada Libro.....	204
Tabla 17. Frecuencias y porcentajes del rango de Página-Total.....	205
Tabla 18. Errores en cada decil (frecuencias, porcentajes y porcentajes acumulados).....	206
Tabla 19. Frecuencias y porcentajes del número de errores en cada decil, en cada Libro.....	208
Tabla 20. Errores por unidad de análisis en cada Libro.....	208
Tabla 21. Promedio de errores por unidad de análisis por Capítulo y Libro.....	209
Tabla 22. Proporción de unidades de análisis pertenecientes a cada Bloque, dentro de cada Capítulo del Libro 1.....	211
Tabla 23. Proporción de unidades de análisis pertenecientes a cada Bloque, dentro de cada Capítulo del Libro 2.....	211
Tabla 24. Proporción de unidades de análisis pertenecientes a cada Bloque, dentro de cada Capítulo del Libro 3.....	211
Tabla 25. Proporción de unidades de análisis pertenecientes a cada Bloque, dentro de cada Capítulo del Libro 4.....	212
Tabla 26. Frecuencias y porcentajes de la variable Contexto.....	213
Tabla 27. Frecuencias y porcentajes de Contexto en cada Libro.....	214
Tabla 28. Contexto de las unidades de análisis totales y de cada Libro.....	214
Tabla 29. Proporción de errores por unidades de análisis según Contexto, en cada Libro.....	215
Tabla 30. Frecuencias y porcentajes de la variable Bloque.....	216
Tabla 31. Frecuencias y porcentajes del cruce de las variables Bloque y Libro.....	217
Tabla 32. Frecuencias y porcentajes de la variable Concepto.....	219
Tabla 33. Frecuencias y porcentajes de la variable Tipo.....	221
Tabla 34. Frecuencias y porcentajes de la variable Tipo en cada Libro.....	223

Tabla 35. Cruce de las variables Bloque y Bloque-Capítulo.....	225
Tabla 36. Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Bloque para el Libro 1.....	226
Tabla 37. Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Bloque para el Libro 2.....	228
Tabla 38. Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Bloque para el Libro 3.....	230
Tabla 39. Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Bloque para el Libro 4.....	232
Tabla 40. Cruce de las variables Bloque y Contexto.....	234
Tabla 41. Cruce de las variables Bloque y Contexto en el Libro 1.....	236
Tabla 42. Cruce de las variables Bloque y Contexto en el Libro 2.....	238
Tabla 43. Cruce de las variables Bloque y Contexto en el Libro 3.....	239
Tabla 44. Cruce de las variables Bloque y Contexto en el Libro 4.....	241
Tabla 45. Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Contexto.....	243
Tabla 46. Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Contexto en el Libro 1.....	245
Tabla 47. Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Contexto en el Libro 2.....	246
Tabla 48. Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Contexto en el Libro 3.....	248
Tabla 49. Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Contexto en el Libro 4.....	249
Tabla 50. Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Tipo.....	252
Tabla 51. Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque-Capítulo.....	253
Tabla 52. Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Tipo en el Libro 1.....	255
Tabla 53. Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque-Capítulo en el Libro 1.....	256
Tabla 54. Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Tipo en el Libro 2.....	256
Tabla 55. Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque-Capítulo en el Libro 2.....	258
Tabla 56. Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Tipo en el Libro 3.....	259
Tabla 57. Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque-Capítulo en el Libro 3.....	260
Tabla 58. Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Tipo en el Libro 4.....	261
Tabla 59. Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque-Capítulo en el Libro 4.....	263
Tabla 60. Cruce de las variables Contexto y Tipo de error.....	264
Tabla 61. Cruce de las variables Contexto y Tipo de error en el Libro 1.....	265
Tabla 62. Cruce de las variables Contexto y Tipo de error en el Libro 2.....	267
Tabla 63. Cruce de las variables Contexto y Tipo de error en el Libro 3.....	268
Tabla 64. Cruce de las variables Contexto y Tipo de error en el Libro 4.....	270
Tabla 65. Cruce de las variables Bloque y Tipo.....	272
Tabla 66. Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque.....	273
Tabla 67. Cruce de las variables Bloque y Tipo en el Libro 1.....	274
Tabla 68. Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque en el Libro 1..	275
Tabla 69. Cruce de las variables Bloque y Tipo en el Libro 2.....	277
Tabla 70. Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque en el Libro 2..	278
Tabla 71. Cruce de las variables Bloque y Tipo en el Libro 3.....	280
Tabla 72. Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque en el Libro 3..	281
Tabla 73. Cruce de las variables Bloque y Tipo en el Libro 4.....	282
Tabla 74. Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque en el Libro 4..	283

Tabla 75. Matriz de correlaciones entre el número de errores y el número de páginas de cada Libro.....	284
Tabla 76. Número de unidades de registro en cada libro.....	284
Tabla 77. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores de un libro con el número de unidades de análisis de ese libro.....	285
Tabla 78. Número de unidades de registro por Libro y Capítulo.....	285
Tabla 79. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores en cada Capítulo con el número de unidades de registro en ese Capítulo.....	286
Tabla 80. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores en cada Capítulo con el número de unidades de registro en ese Capítulo en el Libro 1.....	286
Tabla 81. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores en cada Capítulo con el número de unidades de registro en ese Capítulo en el Libro 2.....	287
Tabla 82. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores en cada Capítulo con el número de unidades de registro en ese Capítulo en el Libro 3.....	287
Tabla 83. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores en cada Capítulo con el número de unidades de registro en ese Capítulo en el Libro 4.....	288
Tabla 84. Unidades de análisis pertenecientes a cada Bloque contenidas en cada Libro.....	288
Tabla 85. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis de Aritmética en cada Libro.....	289
Tabla 86. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis de Medida en cada Libro.....	290
Tabla 87. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis de Geometría en cada Libro.....	290
Tabla 88. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis de Análisis de datos en cada Libro.....	290
Tabla 89. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis de Álgebra en cada Libro.....	290
Tabla 90. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis de Geometría en cada Libro, excluyendo el Libro 4.....	291
Tabla 91. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis de Aritmética en cada Libro, excluyendo el Libro 2.....	291
Tabla 92. Número de unidades de registro que se encuentran en los capítulos dedicados a cada Bloque.....	292
Tabla 93. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis en capítulos dedicados a Aritmética en cada Libro.....	293
Tabla 94. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis en capítulos dedicados a Medida en cada Libro.....	293
Tabla 95. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis en capítulos dedicados a Geometría en cada Libro.....	293
Tabla 96. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis en capítulos dedicados a Análisis de datos en cada Libro.....	294
Tabla 97. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis en capítulos dedicados a Álgebra en cada Libro.....	294

Tabla 98. Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis en capítulos de Aritmética en cada Libro, excluyendo el Libro 2.....	294
Tabla 99. Prueba chi-cuadrado de independencia de las variables Contexto y Bloque-Capítulo.....	295
Tabla 100. Prueba chi-cuadrado de independencia de las variables Contexto y Bloque.....	296
Tabla 101. Comparación de los contenidos del bloque de Aritmética de los currículos de Singapur y España y de la forma en que los libros los aplican.....	370
Tabla 102. Comparación de los contenidos del bloque de Medida de los currículos de Singapur y España y de la forma en que los libros los aplican.....	373
Tabla 103. Comparación de los contenidos del bloque de Geometría de los currículos de Singapur y España y de la forma en que los libros los aplican.....	375
Tabla 104. Comparación de los contenidos del bloque de Análisis de datos de los currículos de Singapur y España y de la forma en que los libros los aplican.....	376
Tabla 105. Comparación de los contenidos del bloque de Álgebra de los currículos de Singapur y España y de la forma en que los libros los aplican.....	377

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Localización de Singapur en el sudeste asiático.....	79
Figura 2. Mapa de Singapur.....	80
Figura 3. Bandera de Singapur.....	81
Figura 4. Variación del porcentaje de población por grupo étnico en Singapur.....	86
Figura 5. Porcentaje de población por grupo étnico entre 1960 y 2015.....	86
Figura 6. Población total y por grupo étnico entre 1960 y 2015.....	87
Figura 7. Variación del IDH entre 1990 y 2014 en Singapur.....	94
Figura 8. Puesto en la tabla clasificatoria mundial de IDH de Singapur.....	94
Figura 9. Las tres vías originales del New Education System en Educación Primaria.....	105
Figura 10. Las tres vías del New Education System entre 1992 y 2004.....	107
Figura 11. Modelo pentagonal del currículo de Matemáticas.....	119
Figura 12. Frecuencias de la variable Libro.....	198
Figura 13. Número de errores por Capítulo en cada Libro.....	200
Figura 14. Porcentaje de errores por Capítulo dentro de cada Libro.....	200
Figura 15. Porcentaje de Bloque-Capítulo (solamente valores válidos).....	201
Figura 16. Porcentajes de la variable Bloque-Capítulo en cada Libro.....	202
Figura 17. Promedio de errores por página en cada Libro.....	204
Figura 18. Porcentaje del rango de Página-Total.....	205
Figura 19. Frecuencia relativa (porcentaje) de los errores en cada decil.....	206
Figura 20. Porcentaje de errores de cada Libro en cada decil.....	206
Figura 21. Promedio de errores por unidad de análisis en cada Libro y en total.....	209
Figura 22. Promedio de errores por unidad de análisis por Capítulo y Libro.....	210
Figura 23. Porcentajes de la variable Contexto.....	213
Figura 24. Proporción de Problema frente a Teoría, por Libro.....	214
Figura 25. Proporción de errores por unidad de análisis según Contexto, en cada Libro.....	215
Figura 26. Porcentajes de la variable Bloque.....	216
Figura 27. Porcentaje de cada valor de Bloque en cada Libro.....	217
Figura 28. Porcentajes de la variable Concepto, ordenados de forma creciente (I).....	220
Figura 29. Porcentajes de la variable Concepto, ordenados de forma creciente (II).....	220
Figura 30. Porcentajes de la variable Tipo.....	221
Figura 31. Porcentajes de la variable Tipo dentro de cada Libro.....	222
Figura 32. Porcentajes de la variable Tipo desglosadas por Libro.....	222
Figura 33. Composición por Bloque de los capítulos dedicados a cada bloque de contenidos.....	224
Figura 34. Distribución de los errores pertenecientes a un Bloque por Bloque-Capítulo.....	224
Figura 35. Distribución de los errores pertenecientes a un Bloque por Bloque-Capítulo en el Libro 1.....	227
Figura 36. Composición por Bloque de los capítulos dedicados a cada bloque, en el Libro 1.....	227
Figura 37. Distribución de los errores pertenecientes a un Bloque por Bloque-Capítulo en el Libro 2.....	228
Figura 38. Composición por Bloque de los capítulos dedicados a cada bloque, en el	

Libro 2.....	229
Figura 39. Distribución de los errores pertenecientes a un Bloque por Bloque-Capítulo en el Libro 3.....	230
Figura 40. Composición por Bloque de los capítulos dedicados a cada bloque, en el Libro 3.....	231
Figura 41. Distribución de los errores pertenecientes a un Bloque por Bloque-Capítulo en el Libro 4.....	231
Figura 42. Composición por Bloque de los capítulos dedicados a cada bloque, en el Libro 4.....	232
Figura 43. Frecuencias de Bloque por valores de Contexto.....	234
Figura 44. Frecuencias de Contexto por valores de Bloque.....	235
Figura 45. Frecuencias de Contexto por valores de Bloque en el Libro 1.....	235
Figura 46. Frecuencias de Bloque por valores de Contexto en el Libro 1.....	236
Figura 47. Frecuencias de Contexto por valores de Bloque en el Libro 2.....	237
Figura 48. Frecuencias de Bloque por valores de Contexto en el Libro 2.....	237
Figura 49. Frecuencias de Contexto por valores de Bloque en el Libro 3.....	239
Figura 50. Frecuencias de Bloque por valores de Contexto en el Libro 3.....	240
Figura 51. Frecuencias de Contexto por valores de Bloque en el Libro 4.....	240
Figura 52. Frecuencias de Bloque por valores de Contexto en el Libro 4.....	241
Figura 53. Frecuencias de Bloque-Capítulo en cada valor de Contexto.....	243
Figura 54. Frecuencias de Contexto en cada valor de Bloque-Capítulo.....	244
Figura 55. Porcentajes de Contexto en cada valor de Bloque-Capítulo en el Libro 1.....	244
Figura 56. Frecuencia de los valores de Bloque-Capítulo en cada valor de Contexto en el Libro 1.....	245
Figura 57. Porcentajes de Contexto en cada valor de Bloque-Capítulo en el Libro 2.....	246
Figura 58. Frecuencia de los valores de Bloque-Capítulo en cada valor de Contexto en el Libro 2.....	247
Figura 59. Porcentajes de Contexto en cada valor de Bloque-Capítulo en el Libro 3.....	247
Figura 60. Frecuencia de los valores de Bloque-Capítulo en cada valor de Contexto en el Libro 3.....	248
Figura 61. Porcentajes de Contexto en cada valor de Bloque-Capítulo en el Libro 4.....	250
Figura 62. Frecuencia de los valores de Bloque-Capítulo en cada valor de Contexto en el Libro 4.....	250
Figura 63. Distribución de Tipos de error por valores de Bloque-Capítulo.....	251
Figura 64. Distribución de valores de Bloque-Capítulo por Tipos de error.....	251
Figura 65. Distribución de Tipos de error por valores de Bloque-Capítulo en el Libro 1.....	254
Figura 66. Distribución de valores de Bloque-Capítulo por Tipos de error en el Libro 1.....	254
Figura 67. Distribución de Tipos de error por valores de Bloque-Capítulo en el Libro 2.....	257
Figura 68. Distribución de valores de Bloque-Capítulo por Tipos de error en el Libro 2.....	257
Figura 69. Distribución de Tipos de error por valores de Bloque-Capítulo en el Libro 3.....	259
Figura 70. Distribución de valores de Bloque-Capítulo por Tipos de error en el Libro 3.....	260
Figura 71. Distribución de valores de Bloque-Capítulo por Tipos de error en el Libro 4.....	262
Figura 72. Distribución de Tipos de error por valores de Bloque-Capítulo en el Libro 4.....	262
Figura 73. Valores de la variable Tipo por cada valor de Contexto.....	264

Figura 74. Valores de la variable Contexto por cada valor de Tipo.....	264
Figura 75. Valores de la variable Tipo por cada valor de Contexto en el Libro 1.....	266
Figura 76. Valores de la variable Contexto por cada valor de Tipo en el Libro 1.....	266
Figura 77. Valores de la variable Tipo por cada valor de Contexto en el Libro 2.....	267
Figura 78. Valores de la variable Contexto por cada valor de Tipo en el Libro 2.....	267
Figura 79. Valores de la variable Tipo por cada valor de Contexto en el Libro 3.....	269
Figura 80. Valores de la variable Contexto por cada valor de Tipo en el Libro 3.....	269
Figura 81. Valores de la variable Tipo por cada valor de Contexto en el Libro 4.....	270
Figura 82. Valores de la variable Contexto por cada valor de Tipo en el Libro 4.....	270
Figura 83. Valores de la variable Tipo en cada valor de la variable Bloque.....	272
Figura 84. Valores de la variable Bloque por cada valor de la variable Tipo.....	273
Figura 85. Valores de la variable Tipo por cada valor de la variable Bloque en el Libro 1....	275
Figura 86. Valores de la variable Bloque por cada valor de la variable Tipo en el Libro 1....	275
Figura 87. Valores de la variable Tipo por cada valor de la variable Bloque en el Libro 2....	276
Figura 88. Valores de la variable Bloque por cada valor de la variable Tipo en el Libro 2....	277
Figura 89. Valores de la variable Tipo por cada valor de la variable Bloque en el Libro 3....	279
Figura 90. Valores de la variable Bloque por cada valor de la variable Tipo en el Libro 3....	280
Figura 91. Valores de la variable Bloque por cada valor de la variable Tipo en el Libro 4....	282
Figura 92. Valores de la variable Tipo por cada valor de la variable Bloque en el Libro 4....	283
Figura 93. El problema de las alfombras.....	315
Figura 94. El problema del contenedor.....	317
Figura 95. El problema de los cromos.....	317
Figura 96. Evolución del porcentaje de alumnos con nivel menor o igual a 1 en las pruebas PISA desde 2003.....	332
Figura 97. Tipologías de modelo Todo-Parte.....	344
Figura 98. Modelo de Comparación para suma y resta sin total.....	345
Figura 99. Modelo de Comparación para producto y división sin total.....	346
Figura 100. Modelo de Comparación para suma y resta con total.....	346
Figura 101. El problema de los cromos. Paso 1.....	348
Figura 102. El problema de los cromos. Paso 2.....	349
Figura 103. El problema de los pasteles. Paso 1.....	350
Figura 104. El problema de los pasteles. Paso 2.....	350
Figura 105. El problema de los pasteles. Paso 3.....	351
Figura 106. El problema de las edades. Paso 1.....	352
Figura 107. El problema de las edades. Paso 2.....	353
Figura 108. El problema de las edades. Paso 3.....	353
Figura 109. El problema de las edades. Representación realista.....	354
Figura 110. El problema de los alumnos con gafas. Paso 1.....	355
Figura 111. El problema de los alumnos con gafas. Paso 2.....	356
Figura 112. El problema de los alumnos con gafas. Paso 3.....	356

ÍNDICE DE ABREVIATURAS

ÍNDICE DE ABREVIATURAS

ASEAN: Asociación de Naciones del Sudeste Asiático.

CPA: Concrete – Pictorial – Abstract.

CMIO: Chino/Malayo/Indio/Otro. Esquema de asignación étnica en Singapur.

CPDD: Curriculum Planning and Development Division.

EECL: Estudio Europeo de Competencia Lingüística.

EPB: Education Publishing Bureau.

GRC: Group Representation Constituencies.

IDH: Índice de Desarrollo Humano.

IEA: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

INEE: Instituto Nacional de Evaluación Educativa.

LOE: Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación

LOMCE: Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.

NES: New Education System.

OCDE: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos.

ONU: Organización de las Naciones Unidas.

OTL: Opportunity To Learn.

PAP: People's Action Party.

PIB: Producto Interior Bruto.

PIRLS: Progress in International Reading Literacy Study.

PISA: Programme for International Student Assessment.

PNB: Producto Nacional Bruto.

PSLE: Primary School Leaving Examination.

PSPE: Primary School Proficiency Examination.

TALIS: Teaching and Learning International Survey.

TIC: Tecnologías de la Información y la Comunicación.

TIMSS: Trends in International Mathematics and Science Study.

TSLN: Thinking Schools, Learning Nation.

UNESCO: Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

PARTE I

INTRODUCTORIA

1. Introducción

La educación de la población debe ser una cuestión prioritaria para cada gobierno del mundo. Existen muchos puntos de vista a través de los cuales queda patente la importancia crítica de la educación. Según el conocido informe “La educación encierra un tesoro” (Delors et al., 1997), algunos de estos puntos de vista son:

- La educación es una herramienta para aprender a convivir en democracia y evitar el conflicto y la guerra.
- La educación, a través de programas integradores y cargados de valores, es un medio de progreso para una nación, a través del desarrollo de la ciencia y la tecnología, indispensables hoy en día.
- Para bien o para mal, la sociedad es cada vez más competitiva. Un sistema educativo adecuado permite a cada individuo desarrollarse y maximizar sus posibilidades de desenvolverse en su entorno social y laboral de acuerdo a sus propias capacidades.

Es por esto que desde las administraciones públicas se invierten importantes porcentajes de los recursos de un país en mantener y mejorar su sistema educativo. Según el Banco Mundial (2016a), el porcentaje del PIB (Producto Interior Bruto) dedicado a la educación por una extensa lista de países y regiones abarcó en el año 2012 un intervalo entre el 1,49% de Sri Lanka y el 8,34% de la República de Moldavia. España ese año invirtió un 4,41% de su PIB, algo menos que la media de los miembros de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos) que alcanzó el 4,93%.

Un buen sistema educativo requiere de inversión por parte de las administraciones públicas, pero eso no es suficiente. Para empezar, esa inversión se puede distribuir de muchas formas, pues un sistema educativo posee una enorme cantidad de factores que abarcar, y su éxito se ve influido por una cantidad no menor de otros factores externos. Muchos de estos factores, por ejemplo los culturales,

pueden no estar relacionados directa o indirectamente por la financiación destinada a la educación.

Además, y más importante, no existe un único sistema para caracterizar y medir la bonanza de la educación de un país de forma objetiva. A modo de aproximación, muchos estudios y medios de comunicación hacen uso de los resultados arrojados por proyectos internacionales de evaluación del aprendizaje escolar, como PISA (Programme for International Student Assessment) y TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) (Acevedo Díaz, 2005; Artlet, Baumert, Julius-McElvany y Peschar, 2003; Carabaña Morales, 2002; IEA, 2011f; Martin, Mullis, et al., 2000; Martin, Mullis y Chrostowski, 2004; Martin, Mullis y Foy, 2008a; Martin, Mullis y Foy, 2008b; Martin, Mullis, Foy y Stanco, 2012; Mullis, Martin y González Nagel, 2000; Mullis, Martin y González Nagel, 2004; Mullis, Martin, Foy y Arora, 2012; Murphy, 2010; OCDE, s.f.; OCDE, 2004; OCDE, 2008; OCDE, 2010a; OCDE, 2013; OCDE, 2016b). Aunque de ninguna forma los resultados de estos proyectos pueden responder a preguntas como: ¿Cuál es el mejor sistema educativo del mundo?, ¿Qué caracteriza a un buen sistema educativo?, ¿Cuáles son los pasos que los gobiernos deben dar para mejorar su educación?, constituyen una herramienta que puede servir para describir cualitativamente diferencias entre los países participantes y para identificar posibles razones por las cuales determinados países obtienen resultados similares (Olsen, 2005). No obstante, severas limitaciones como las ambigüedades que pueden surgir en la traducción a diferentes lenguas de los cuestionarios, así como la diferentes interpretaciones que se pueden realizar sobre los resultados brutos (Bray y Kobakhidze, 2014) hacen que no se pueda considerar que estos estudios son la solución definitiva a los problemas educativos del mundo, o siquiera que apuntan inequívocamente a ella.

Habida cuenta de la complejidad inherente a la idea de la educación de calidad, estando ésta compuesta de diferentes ejes centrados en aspectos muy diversos de la educación (Aguerrondo, 1993), se torna muy difícil, si no imposible, el emprendimiento de investigaciones educativas sobre la calidad de la educación de un país desde un punto de vista global. Es mucho más realista la realización de investigaciones aplicadas a parcelas más restringidas del universo educativo.

Una de estas parcelas en las que cabe ahondar, dada su importancia, es la educación en matemáticas. Existen muchas referencias que ponen de manifiesto la importancia que tiene aprender matemáticas. Por ejemplo, “aprender matemáticas es potenciarse. Los estudiantes matemáticamente poderosos son cuantitativamente ilustrados. Son capaces de interpretar las enormes cantidades de datos cuantitativos que se encuentran diariamente y de realizar juicios equilibrados partiendo de esas interpretaciones¹” (Schoenfeld, 1992, p. 335).

El correcto aprendizaje de las matemáticas es especialmente importante en las etapas iniciales de la educación, incluyendo Educación Primaria, puesto que a estas edades el niño no acumula datos, sino que construye su propio conocimiento a partir de lo que el profesor le enseña (Carpenter, Fennema y Franke, 1996).

Y si, como acabamos de ver, el conocimiento matemático otorga poder, la falta de éste acarrea importantes consecuencias, las cuales se pueden encontrar a nuestro alrededor con relativa frecuencia. Una de ellas, la incapacidad de manejar conceptos numéricos y estadísticos, se pone de manifiesto en los ejemplos recogidos por Peral Alonso (2003) o Paulos (2000), como la siguiente intervención de un hombre del tiempo en televisión:

La probabilidad de que llueva el sábado es del cincuenta por ciento y la probabilidad de que llueva el domingo es también del cincuenta por ciento; saquen sus paraguas del armario porque con estos datos es seguro que lloverá el fin de semana. (Peral Alonso, 2003, p. 162)

De hecho, las matemáticas son a menudo fuente de rechazo por parte de los alumnos que las estudian, y el origen de este rechazo se debe frecuentemente a la dificultad, tanto subjetiva como objetiva, que las caracteriza (Hidalgo Alonso, Maroto Sáez y Palacios Picos, 2004). Esta dificultad intrínseca obliga a prestar una especial atención a la forma en la que se enseñan y se aprenden las matemáticas y, por tanto, suscita la aparición de estudios como el presente.

De entre todos los factores que afectan al aprendizaje en matemáticas, en este trabajo centramos nuestra atención en el error. El error forma parte de la vida

1 Learning mathematics is empowering. Mathematically powerful students are quantitatively literate. They are capable of interpreting the vast amounts of quantitative data they encounter on a daily basis and of making balanced judgments on the basis of those interpretations. (Traducción propia)

cotidiana del alumno en su esfuerzo por aprender matemáticas (Pochulu, 2005). Al fin y al cabo, el error es un componente fundamental del proceso de aprendizaje (Rico, 1995). Por esta razón, se dedican muchos esfuerzos en investigación a los errores que los alumnos cometen (por ejemplo, Alber-Morgan, Ramp, Anderson y Martin, 2007; Fuchs et al., 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008; Lovitt y Esveldt, 1970; Mazzocco, 2005; Raghubar et al., 2009; Schochet y Chiang, 2010).

El objetivo de estas investigaciones suele ser identificar las parcelas del aprendizaje que resultan más problemáticas al alumno promedio o bien tratar de conocer el origen de estos errores con el propósito de evitar su aparición. Tal es el enfoque del estudio del error por parte de Piaget y la Escuela de Ginebra (Gagatsis y Kyriakides, 2000). De hecho, se ha comprobado que ciertos conceptos y operaciones son objeto del mismo error por parte de alumnos inmersos en muy diferentes contextos educativos y sociales, dando lugar al concepto de “obstáculo”, definido (no unánimemente) como dificultad intrínseca de ciertos conceptos matemáticos, que produce unos errores característicos que pueden ser observados y analizados (Gagatsis y Kyriakides, 2000). Es más, se puede afirmar que los errores de los estudiantes están inmersos en una fuerte correlación causa-efecto, y de ahí su carácter sistemático. Las causas habría que buscarlas, pues, no solamente en los obstáculos anteriores sino en las múltiples interacciones existentes entre las variables presentes en el proceso educativo, entre ellas el profesor, el currículo, el estudiante, el entorno académico, el recurso didáctico, etc. (Radatz, 1980).

Aunque, según Gagatsis y Kyriakides (2000), un porcentaje significativo de los profesores (rondando el 25%) estima que frecuentemente los errores de los alumnos están asociados al enunciado del problema, en su estudio no entran a considerar si el enunciado es confuso o incorrecto, o si simplemente el enunciado implica unos conceptos que contienen en sí mismos una dificultad especial. Así, el peso de la culpa de los errores recae fundamentalmente en el alumno. Sin embargo, los autores introducen un agente externo: las imperfecciones en los materiales escolares.

El proceso de enseñanza y aprendizaje no se apoya únicamente en el profesor y el alumno, sino que también requiere el uso de materiales escolares los cuales adquieren formas muy diversas: manuales para el profesor y para el alumno, cuadernos de actividades, vídeos, monografías, etc. (Bonafe, 1992). En la actualidad, la lista se engrosa con los soportes tecnológicos (pizarras digitales, actividades interactivas, etc.).

De entre todos estos materiales, es el libro de texto uno de los más utilizados (Monterrubio Pérez y Ortega del Rincón, 2011), y ni siquiera los nuevos medios informáticos han desplazado en los últimos años al libro de texto como recurso esencial en el aula (Ministerio de Educación Cultura y Deporte y Observatorio de la Lectura y el Libro, 2015; Ruiz de Gauna Gorostiza, Dávila Balseira, Etxeberria Murgiondo y Sarasua Fernández, 2013).

Muchos errores que podemos encontrar en los libros de texto, según Gagatsis y Kyriakides (2000), pasan desapercibidos porque se da el caso de que los ejercicios escolares, especialmente los problemas de enunciado, casi siempre tienen ciertas características comunes. Cuando un problema carece de alguna de ellas, el alumno suele tratar de atribuírsela reinterpretando el enunciado, ejecutando operaciones sin sentido lógico o reaccionando con confusión (por ejemplo, cuando se da un dato innecesario y el alumno se bloquea). Estas características comunes componen un metalenguaje al que el alumno se termina habituando con la ayuda del profesor, que ya lo tiene interiorizado. Pero este metalenguaje, que permite al alumno completar o interpretar el enunciado, en ocasiones enmascara una situación matemáticamente errónea que se pasa por alto, tanto por parte del profesor como del alumno.

Pero aun cuando los errores son identificados, a menudo se minimiza su efecto. Ball (2003) muestra una definición a todas luces incorrecta en un libro de texto (y también algunas definiciones no incorrectas pero sí inadecuadas) sin prestarle especial atención ni dar relativa importancia al hecho de que tales errores existen, y por supuesto, sin un planteamiento más o menos serio de las consecuencias que puedan tener en los aprendizajes.

Los programas de evaluación internacional han puesto de manifiesto repetidamente la posición nada privilegiada de España dentro del marco educativo internacional, en particular en el área de matemáticas. De hecho, en la propia redacción de la Ley Orgánica para la mejora de la calidad educativa o LOMCE estos programas se tienen en cuenta como válidos descriptores del estado de la educación del país, e incluso se fijan objetivos conforme a ellos, como aumentar el porcentaje de alumnos en los niveles superiores de aptitud (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa) y disminuir el porcentaje de alumnos en los niveles más bajos (Ruiz Rosillo, De Esteban Villar y Sancho Gargallo, 2016).

Los errores existentes en los libros de texto más utilizados en la Comunidad de Madrid en 6.º curso de Educación Primaria ya fueron estudiados recientemente (Fernández Palop, 2013; Fernández Palop, Caballero García y Fernández Bravo, 2013) y enunciados como posibles factores determinantes del rendimiento matemático de nuestros estudiantes. El análisis de los países más destacados y que repiten primeros puestos en cuanto a resultados de rendimiento matemático en la evaluación internacional suscitó nuestro interés por Singapur y nuestra curiosidad por analizar sus libros de texto en busca del error y de un mayor entendimiento de esta realidad y su potencial explicativo de estos resultados. Realizar un análisis sobre los libros de un país que sí sobresalga en TIMSS o en PISA para comprobar si existen diferencias con el caso de la Comunidad de Madrid podría indicar una de las posibles causas de la mejorable situación de la educación matemática en España, y por consiguiente apuntar a una solución.

Nuestro objetivo fue, por tanto, comprobar la existencia de errores matemáticos en los libros de texto de Singapur. Y en caso de comprobar su existencia, estudiar su distribución, clasificarlos y caracterizarlos.

Para llevar a cabo nuestro propósito, empleamos una metodología de investigación cualitativa (Bisquerra Alzina, 2004), enmarcada dentro del paradigma humanístico-interpretativo por el carácter inductivo y de comprensión holística que emanan del problema de investigación (González Morales, 2003; Gutiérrez Pérez, Pozo Llorente y Fernández Cano, 2002; Merino, 1995), y el análisis de contenido como principal técnica de recogida de datos y de cuantificación.

Una vez desarrollado nuestro trabajo, hemos comprobado que los libros de texto de Matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria de Singapur tienen errores matemáticos, y sabemos cuáles son y cómo son a través de nuestros resultados.

Pero al margen de las conclusiones obtenidas sobre los errores en estos libros de texto en particular, que nos permiten saber hasta qué punto la situación en Singapur es similar o no a la que se estudió en la Comunidad de Madrid, el afrontamiento de este estudio también nos ha abierto el camino hacia el descubrimiento de todo un abanico de prácticas, contenidos que se ven del análisis de contenido de sus libros y metodologías aplicadas a la enseñanza de las matemáticas, que dan referencias

del sistema educativo de Singapur, y que pueden tener implicaciones de cambio y de mejora para la educación española.

El informe de investigación que presentamos se ha estructurado en cuatro partes. La primera parte incluye esta introducción, que supone el primer capítulo y la antesala de los contenidos que se desarrollarán a lo largo de todas sus páginas.

En la segunda parte hemos desarrollado la base teórica de nuestro trabajo, haciendo un recorrido por los programas internacionales de evaluación escolar (PISA y TIMSS), donde se hacen descripciones generales de países y se hace mención especial a España y Singapur. Una vez justificada la elección de Singapur como país destacado por los resultados de sus alumnos en rendimiento matemático, se describen los aspectos históricos, sociales y políticos en los cuales se desarrolla el proceso educativo en este país, los cuales sirven de contexto de la unidad de análisis. A continuación repasamos el papel que desempeñan los libros de texto en el proceso educativo, para por último reseñar los estudios existentes acerca de los errores en los mismos.

La tercera parte, que recoge el contenido empírico del trabajo, comienza con una breve introducción con los antecedentes de este estudio, la formulación del problema, el planteamiento de la pregunta, los objetivos, y las variables de investigación y se describen la población y la muestra analizada, los instrumentos de los que se ha hecho uso, el procedimiento de recogida de datos y su análisis estadístico posterior para el cumplimiento de los objetivos y dar respuesta al problema de la investigación. Esta parte finaliza con una exposición de los resultados y una reflexión crítica (discusión) de los mismos y sus implicaciones en el campo de la educación.

La cuarta parte contiene las conclusiones, recapitula las limitaciones y dificultades a las que nos hemos tenido que enfrentar a lo largo del estudio, y finaliza con un capítulo dedicado a la prospectiva, en el que se proponen una serie de investigaciones que pueden surgir de forma natural a partir de esta investigación y darle así continuidad.

El informe se cierra con las referencias bibliográficas que han servido de fundamentación teórica de este estudio y con unos anexos que complementan nuestras evidencias y enriquecen su contenido.

PARTE II
TEÓRICA

2. Los programas de evaluación internacional

Existen multitud de razones por las que diferentes países tienen sistemas educativos con diferentes niveles de calidad: económicas, históricas, políticas, sociales y un largo etcétera. Todos los sistemas educativos tratan de formar a sus nuevas generaciones para desempeñar un papel activo y útil en la sociedad y contribuir al bienestar futuro de la nación. Todos exhiben diferencias entre unos y otros, tratando de solventar en lo posible los particulares problemas que se presentan. La disciplina científica que se encarga de examinar las diferentes formas en que se tratan de solucionar esos problemas y su posible extrapolación a otros sistemas educativos diferentes recibe el nombre de “educación comparada” (ver por ejemplo Castellanos Quintero, 2006; García Garrido, 1996; Olivera Lahore, 1986). La educación comparada es una disciplina relativamente moderna y con mucho camino por recorrer, pues no en vano “la medición absoluta del rendimiento de un sistema educativo es prácticamente una utopía, pues aún son muchos los factores desconocidos que pueden incidir en ello”. (Acevedo Díaz, 2005, p. 295).

Continúa Acevedo: “Por lo tanto, no se debería minusvalorar la importancia de los estudios comparativos de evaluación entre países, porque se trata de una medición relativa más factible” (p. 295). En efecto, cabe ensalzar la importancia de los actuales programas internacionales de evaluación escolar, que miden multitud de variables y recogen grandes cantidades de datos sobre los sistemas educativos que participan en ellos, al margen, por supuesto, del propio desempeño de los escolares en las pruebas, que acapara la mayor parte de la atención mediática. Es este carácter de exhaustividad el que nos lleva a acudir a ellos con la intención de usarlos como criterio objetivo para realizar la selección del sistema educativo en el que centrar nuestra atención. Debe ponerse de manifiesto que la posición relativa de un país en un estudio internacional no significa en modo alguno que su sistema educativo sea intrínsecamente mejor o peor que otros, pero las conclusiones arrojadas por estos estudios sí que pueden apuntar a ciertos aspectos en algunos países que son susceptibles de mejora o de ser imitados por otros sistemas educativos. El hecho de que los países que han quedado en las primeras posiciones tengan algo que enseñar a los países que han obtenido puntuaciones significativamente más bajas justifica la búsqueda de un buen candidato para nuestro trabajo, entre aquéllos presentes en la cabeza de la tabla de cada estudio.

Existen varios programas internacionales de evaluación educativa que proporcionan datos destinados a la comparación de los diferentes sistemas educativos y su evolución y, por tanto, al diagnóstico de los problemas que adolezcan y su solución por parte de las administraciones competentes. Las evaluaciones internacionales suscitan en la literatura de investigación, además, el análisis por una parte de los países con resultados sobresalientes en busca de las claves de su éxito, y por otra la revisión de los sistemas educativos del resto de los países con afán de encontrar un margen de mejora (véase, por ejemplo, Ahuja, 2006; Ginsburg, Leinwand, Anstrom y Pollock, 2005; Ismail y Awang, 2009; Steiner, 2010). Incluso, como plantean Mesa, Gómez Guzmán y Cheah (2012), cabe preguntarse por la influencia que estas pruebas internacionales tienen sobre aspectos particulares de un sistema educativo, como la preparación de los profesores, la elaboración de los libros de texto e incluso la redacción de los currículos que se impartirán en las aulas.

Existe un contrapunto a esta perspectiva. Al ofrecer valoraciones relativas (comparando unos países con otros), los gobiernos pueden sentirse arrastrados a buscar mejoras respecto a otros países, en lugar de buscar mejoras absolutas. Pero más aún, como afirma Gorard (2004), ni siquiera las comparaciones son siempre válidas entre países con distintos sistemas educativos, motivaciones e idiosincrasias, aunque las referencias que las pruebas internacionales proporcionan permiten, una vez sujetas a reflexión, encontrar soluciones propias y adaptadas a cada país (Caballero García, 2010).

En cualquier caso, es importante tener en cuenta que los valores que figuran en las clasificaciones ofrecidas por estos estudios son estadísticos, luego están inherentemente sujetos a error. Tal y como advierten desde la OCDE (OCDE y UNESCO Institute for Statistics, 2003), solamente las diferencias estadísticamente significativas han de ser tenidas en cuenta. Pequeñas diferencias en puntuación pueden hacer que un país esté situado por encima de otro (o de varios), pero estadísticamente hablando sus resultados serán equivalentes.

Además, a pesar de la importancia que se le presta en los medios de comunicación a los puestos en que finaliza cada país según los resultados de los diferentes estudios, desde el punto de vista de los organizadores el interés se sitúa en las razones por las que los países obtienen distintas puntuaciones (Keeves, 1992). De hecho, en lugar de solamente evaluar las notas de los estudiantes, los estudios

internacionales deben ir más allá y analizar las motivaciones y las actitudes de éstos ante el aprendizaje (Artlet et al., 2003):

En el colegio, los estudiantes que exhiben disposiciones positivas en cuanto al aprendizaje, tanto en términos de actitud como de conducta, tienden a obtener buenos resultados. Pasado el periodo escolar, tanto los niños como los adultos que han desarrollado la capacidad y la motivación para aprender por su propia iniciativa están bien situados para poder seguir aprendiendo durante toda su vida. Así, una evaluación general de los resultados de la escolarización tiene que tener en cuenta no solamente los conocimientos y entendimiento de los estudiantes, sino también sus disposiciones² (p. 8).

En España, el órgano encargado de la evaluación del sistema educativo es el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE), dependiente del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Este órgano tiene las siguientes funciones (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015):

- Coordinación de las políticas de evaluación general del sistema educativo y realización de las evaluaciones generales de diagnóstico.
- Participación en la elaboración de los indicadores internacionales de la educación.
- Realización de investigaciones y estudios de evaluación del sistema educativo y difusión de la información que de ellos se desprende.

Y, en lo que respecta a este capítulo:

- La coordinación de la participación del Estado español en las evaluaciones internacionales.

España participa activamente en una serie de programas y estudios de evaluación educativa de diversa índole, desde indicadores generales de la educación, hasta la formación de los maestros y profesores, pasando por diferentes pruebas de aptitudes para los alumnos. Entre estas últimas, encontramos los programas Progress in International Reading Literacy Study (PIRLS), Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), Estudio Europeo de Competencia Lingüística (EECL) y Programme for International Student Assessment (PISA). En particular el informe

2 At school, students who have positive approaches to learning, in terms of both attitudes and behaviours, tend to enjoy good learning outcomes. Beyond school, children and adults who have developed the ability and motivation to learn on their own initiative are well-placed to become lifelong learners. Thus, an overall assessment of the outcomes of schooling needs to consider not only students' knowledge and understanding but also their approaches to learning. (Traducción propia)

PISA goza de tal prestigio que la Ley Orgánica 8/2016, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa de 2013 lo menciona en su texto aludiendo a los pobres resultados obtenidos por España hasta ahora y la necesidad de mejorarlos en el futuro.

A continuación se describen algunos de los estudios internacionales más importantes, sus características y los resultados obtenidos en sus distintas ediciones. Se dedicará una especial atención a las puntuaciones de Singapur, por haberse revelado en un análisis preliminar como un país que ha logrado unos extraordinarios resultados edición tras edición, y a las de España, teniendo en cuenta que en Madrid se originaron los antecedentes de esta investigación.

2.1. Progress in International Reading Literacy Study (PIRLS)

2.1.1. Antecedentes: IEA Reading Literacy Study

En los años 1990 y 1991 la *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA) llevó a cabo un estudio internacional para examinar los niveles de comprensión lectora en diversos países y su relación con las características socioeconómicas de cada uno de ellos. En este estudio se recogieron datos de alumnos de 9 años y de 14 años pertenecientes a los sistemas educativos de 32 países³. La muestra sobre la que los datos fueron elaborados se compuso de 55.951 estudiantes (Wolf, 1995).

Uno de los objetivos era medir los niveles de comprensión lectora de los alumnos, definiendo comprensión lectora (*reading literacy*) como “la capacidad de entender y utilizar aquellas formas de lenguaje escrito requeridas por la sociedad y/o valoradas por el individuo” (Binkley y Williams, 1996, p. 3).

3 Debe entenderse por “país”, y así se utiliza en la literatura consultada, a cualquier jurisdicción educativa que se estudia como una unidad. Puede coincidir con el concepto tradicional de país (como en el caso de España o Italia), pero no siempre es así, como sucede con Bélgica (Flamenca) y Bélgica (Francesa) o con Hong Kong, que participan como entidades propias a pesar de no ser políticamente hablando países propiamente dichos.

2. Los programas de evaluación internacional

En su página web, la IEA (2011c) señala entre los resultados principales que los alumnos en los que la lengua de instrucción es distinta a la lengua materna fueron los que obtuvieron resultados inferiores a los del resto de países, con la notable excepción de Singapur, que obtuvo resultados mejores a los esperados de acuerdo a los índices de desarrollo económico, salud y alfabetización de la población adulta. España, por su parte, obtuvo unos resultados que mejoraban la expectativa, basada en el contexto económico del país. Una posible explicación a este fenómeno está, según Elley (1992), en el alto grado de regularidad existente en la lengua española entre grafema y fonema, al igual que sucede con el finés⁴.

Según los datos recogidos en el informe completo del estudio (Binkley, Rust y Williams, 1996), en los datos relativos a los alumnos de 9 años (tercero o cuarto de Educación Primaria, según el país, excepto en Nueva Zelanda, en el que los alumnos pertenecían a 5.º grado) Singapur poseía algunas características que lo distinguían de la mayor parte de los demás países.

Es interesante resaltar, como menciona Elley (1992), que los resultados generales apuntan a que las clases más numerosas tuvieron resultados mejores. Sin embargo, estos resultados se debieron a los valores atípicos de Singapur y Hong Kong, quienes con 37 y 38 alumnos por clase aumentaban el efecto del tamaño de las clases en la media. Sin ellos, no habría evidencias estadísticas para afirmar que el tamaño de la clase afectaba a los resultados de los alumnos en la prueba.

Y no solamente poseía Singapur las aulas más pobladas, sino también los colegios más grandes. La media de alumnos en cada escuela superaba los 1.200 alumnos, muy por encima del siguiente país, Eslovenia, con 701.

En cuanto a los resultados generales para los alumnos de 9 años, la puntuación media de todos los países fue de 500 puntos, siendo Finlandia el país que obtuvo los mejores resultados, 569 puntos, seguida de los Estados Unidos con 547. Singapur y España obtuvieron unos discretos resultados ligeramente por encima de la media, 515 y 504 respectivamente, lo que los dejó en los puestos 12 y 17 de la tabla de 35 países. Sin embargo, el caso de Singapur es meritorio e inesperado por la juventud de su sistema educativo y sobre todo por tener una lengua de instrucción distinta en

4 Las reglas de ortográficas del español y del finés permiten a cualquier lector pronunciar (producir fonemas) una palabra escrita (grafemas) sin que exista posibilidad de ambigüedad. El paso inverso, escribir una palabra (producir grafemas a partir de los fonemas), no es siempre evidente.

la mayoría de los casos (por encima del 70% de los alumnos) a la lengua que los estudiantes utilizaban en el hogar, como señala Elley (1992). Además, cabe destacar que el Learning Support Programme (LSP) para ayudar a los estudiantes de 1.º y 2.º curso con bajo nivel de inglés acababa de ponerse en marcha cuando Singapur participó en el estudio, por lo que ningún alumno que se enfrentó a la prueba había podido beneficiarse de las ayudas de este programa.

En una de las pruebas, sin embargo, Singapur sobresalió por encima del resto de países, incluso de Finlandia. La prueba medía la velocidad de reconocimiento de palabras, una habilidad que se considera un prerrequisito para una correcta comprensión lectora (Elley, 1992).

2.1.2. PIRLS

El Reading Literacy Study (IEA, 2011c) tenía como uno de sus objetivos sentar las bases para la realización de pruebas internacionales periódicas para la medición de la comprensión lectora. Ese objetivo cristalizó en el *Progress in International Reading Literacy Study* (PIRLS) que es un estudio periódico que realiza cada cinco años la IEA para medir las tendencias en la comprensión lectora de los alumnos. Las tres ediciones hasta ahora han sido en 2001, 2006 y 2011.

Aunque este estudio en principio está diseñado para alumnos de 4.º curso de Educación Primaria, la existencia de países en los que a esa edad los alumnos todavía están desarrollando las competencias básicas en lectura debido a su contexto socioeconómico obligaron a la IEA a tomar medidas pensadas fundamentalmente para países en vías de desarrollo (IEA, 2013a). Por ello, desde 2011 existen las opciones de aplicación de PIRLS en 5.º o 6.º curso o bien la aplicación de prePIRLS, un estudio paralelo similar a PIRLS pero de menor dificultad. Estas medidas están pensadas fundamentalmente para países en vías de desarrollo, según la hoja informativa editada por la IEA .

La IEA es consciente del valor que los diferentes países conceden a sus estudios. La PIRLS 2011 Encyclopedia (Mullis, Martin, Minnich, Drucker y Ragan, 2012), en referencia al impacto de PIRLS en Singapur y España respectivamente, afirma:

2. Los programas de evaluación internacional

Los resultados de PIRLS proporcionan una valiosa información comparativa acerca del currículo de Inglés y el aprendizaje de la comprensión lectora en Singapur. Los datos de PIRLS sobre los cambios en los hábitos y actitudes de los estudiantes frente a la lectura se utilizaron para que los políticos mejorasen su entendimiento del impacto de los programas de promoción de la lectura y el uso de las bibliotecas en los hábitos de lectura. La información sobre los resultados de los estudiantes se utilizó también para guiar el desarrollo de materiales para la formación del profesorado y otros recursos que mejorasen las habilidades metacognitivas y de auto-observación⁵ (p. 578).

(...) España participó en PIRLS 2006 y ha impulsado el objetivo nacional de promover la lectura y el uso de bibliotecas a raíz de los resultados de PIRLS, PISA comprensión lectora y las evaluaciones nacionales en lectura⁶ (p. 632).

2.1.3. PIRLS 2001

La primera edición de PIRLS (2001) se llevó a cabo con la participación de 35 países en total, sobre alumnos de 10 años.

En este primer estudio, Singapur estaba inmersa en el New Education System, que ya contaba con casi una década de existencia. Esto implicaba tres vías de segregación según las capacidades de los alumnos a partir de 5.º curso de Educación Primaria, como veremos en el Capítulo 3.

Los resultados del estudio no fueron significativamente mejores que los obtenidos en el Reading Literacy Study de los años 1990 y 1991. Singapur obtuvo 528 puntos, lo que la dejó en el puesto 14 de 35. En esta ocasión, la máxima puntuación la obtuvieron los alumnos de Suecia, con 562 puntos (Mullis, Martin y González Nagel, 2004). España no participó en esta edición.

5 Findings from PIRLS provide valuable benchmarking information about the Singapore English curriculum and student learning in reading literacy. PIRLS data on changes in students' reading habits and attitudes were used to help policy-makers better understand the impact of reading and library programs on reading behavior. Information on student performance was also used to guide the development of teacher training materials and other resources to enhance students' meta-cognition and self-monitoring skills. (Traducción propia)

6 Spain participated in PIRLS 2006 and has launched a national goal to promote reading and the use of libraries in response to results from PIRLS, PISA reading literacy, and national reading assessments. (Traducción propia)

2.1.4. PIRLS 2006

El siguiente estudio de PIRLS tuvo lugar en 2006. En este caso participaron 45 países. De los que lo hicieron en la etapa anterior, en 2001, no participaron Argentina, Belize, Colombia, Chipre, República Checa, Grecia y Turquía. Por contra, participaron por primera vez España, Austria, Bélgica (con sus dos sistemas educativos, el francés y el flamenco, participando por separado), Canadá, Taiwán, Dinamarca, Georgia, Indonesia, Kuwait, Luxemburgo, Polonia, Qatar, Sudáfrica y Trinidad y Tobago. Entre los 45 países se encuentran también las regiones canadienses de Alberta, Columbia Británica, Ontario, Nueva Escocia y Quebec (Martin, Mullis y Kennedy, 2007).

En cuanto a los resultados de la prueba, según el informe técnico (Mullis, Martin, Kennedy y Foy, 2007), Singapur obtuvo una puntuación significativamente mejor que la de la prueba de 2001, alcanzando los 558 puntos (la media internacional fue escalada a 500 puntos, con una desviación típica de 100). Singapur se puso en la cuarta posición de la lista, por debajo de la Federación Rusa (con 565 puntos), Hong Kong (564), y la provincia canadiense de Alberta (560). A pesar de no haber obtenido la puntuación más alta, los estudiantes singapurenses destacaron porque un 19% de ellos lograron o superaron la marca de los 625 puntos, y un 58% la de 550 puntos. Solamente un 3% de los alumnos obtuvo una puntuación inferior a los 400 puntos, que es el nivel considerado “bajo”.

España, por su parte, obtuvo una media de 513 puntos, lo que la dejó en la posición 30 (recordemos, de 45 países y regiones en total), con resultados similares a los de Israel, Polonia e Islandia y a relativamente poca distancia de la media internacional de 500 puntos. Solamente un 31% de los estudiantes logró superar los 550 puntos (un 5% superó los 625), aunque apenas un 6% de los participantes se quedaron por debajo de la marca de los 400 puntos. A pesar de poseer varias lenguas cooficiales, para todos los estudiantes que se presentaron la lengua de la prueba fue el castellano.

Cabe destacar la significativa diferencia entre las puntuaciones medias de las niñas y los niños singapurenses, de 16 puntos en dos de los ejercicios de la prueba (favorable a las niñas). Aunque no es un resultado abultado como los de Kuwait y Sudáfrica (con más de 60 y 30 puntos de diferencia en cada prueba, respectivamente), es mayor que el de buena parte de los países europeos, incluyendo a España donde

las diferencias alcanzaron los 7 puntos en una de las pruebas y 0 en la otra. Tomando los resultados generales, las niñas de los países participantes tuvieron mejores resultados que los niños.

2.1.5. PIRLS 2011

Hasta la realización de la edición de 2016, la de 2011 ha sido la última prueba internacional de comprensión lectora de la IEA. Según la IEA (Mullis, Martin, Foy y Drucker, 2012), en 2011 participaron 45 países y regiones, aunque en esta ocasión solamente la participación independiente de Irlanda del Norte y de las dos Bélgica (la francesa y la holandesa) se sumaban a la lista de países. En esta ocasión, Australia, Azerbaiyán, Canadá (como país), Croacia, Finlandia, Irlanda, Malta, Omán, Portugal, Arabia Saudí y Emiratos Árabes Unidos participaron por primera vez en la historia del estudio. A esta edición no presentaron alumnos ni Kuwait ni Sudáfrica, que sí participaron en la anterior edición.

Al igual que en 2006, en 2011 las chicas obtuvieron mejores resultados en casi todos los países (excepto Colombia), siendo las diferencias estadísticamente significativas en todos salvo en cinco. De media, las chicas alcanzaron los 520 puntos frente a los 504 de los chicos.

En esta ocasión, Singapur se desmarcó del resto de países con un impresionante 24% de alumnos por encima de 625 puntos y un nada despreciable 62% por encima de los 550. Sin embargo, quedó nuevamente en el cuarto puesto con 567 puntos, por detrás pero muy cerca de Hong Kong (571 puntos), la Federación Rusa (568) y Finlandia (también 568, teniendo en cuenta que participaba por primera vez en PIRLS).

En relación a España, los resultados de la prueba fueron 513 puntos, lo que nos situó en un nivel intermedio respecto a la escala definida en el estudio (con el nivel bajo entre 400 y 475 puntos y el nivel alto entre 550 y 625 puntos). En Europa, España solamente aventajó a Noruega, Bélgica (comunidad francesa), Rumanía y Malta. En el cómputo global, en el que la media fue de 512 puntos, España se situó en el puesto 30 de 45 países que participaron (González Such y Bakieva, 2013).

2.2. Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)

2.2.1. Antecedentes (1): FIMS

En el año 1964 se llevó a cabo por parte de la IEA un estudio comparativo internacional centrado en las matemáticas, que recibió el nombre de First International Mathematics Study, o FIMS (IEA, 2011a). Este estudio vino suscitado por la irrupción de la llamada “reforma de las nuevas matemáticas” en los planes de estudios de algunos países, la cual introdujo la teoría de conjuntos (que es en realidad la base de la matemática) en todos los niveles educativos, dándole prioridad sobre otros conceptos. Esta reforma fue seguida de un rotundo fracaso y rechazo en las décadas siguientes (Chavarría, 2008).

Participaron 12 sistemas educativos: Australia, Bélgica, Inglaterra, Finlandia, Francia, República Federal Alemana, Israel, Japón, Países Bajos, Escocia, Suecia y Estados Unidos. Ni España ni Singapur tomaron parte en el estudio. La población objetivo se compuso por un lado estudiantes de 13 años y por otro, estudiantes preuniversitarios. Los mejores resultados fueron obtenidos por Japón, mientras que los estudiantes de Estados Unidos y Suecia quedaron al final de la tabla (Burstein y Hawkins, 1986), aunque los resultados deben ser interpretados con precaución debido a la falta de detalles sobre la composición de las muestras y otros datos clave (U.S. Department of Education y National Center for Education Statistics, 2000).

Los resultados mostraron, por una parte, que los estudiantes expuestos a cursos de “nuevas matemáticas” obtuvieron mejores resultados que los que no lo habían hecho. Además, y al contrario que en PIRLS, las diferencias entre sexos favoreció unánimemente a los chicos, independientemente del país, grupo de edad y tipo de escuela (mixta o segregada por sexo).

2.2.2. Antecedentes (2): FISS

En los años 1970 y 1971, la IEA se embarcó en un importante estudio de investigación, conocido como Six Subject Survey (Bloom, 1969). Las áreas en las

que se centró este estudio fueron Educación Cívica, Inglés (como lengua extranjera), Francés (como lengua extranjera), Literatura, comprensión lectora y Ciencias. Esta última área fue el objeto del First International Science Study o FISS (IEA, 2011b). En 1970 la IEA se dedicó a las Ciencias, la comprensión lectora y la Literatura, y en 1971, a las otras dos.

FISS, dirigido a alumnos de 10 años, 14 años y estudiantes del curso preuniversitario de cada uno de los 18 países participantes (entre los que no se encontraban ni Singapur ni España) aprovechó recientes reformas de la educación en ciencias de muchos países, para examinar no solamente los conocimientos de los alumnos, sino los propios métodos de enseñanza. En particular, entre los resultados se encontró una relación directa entre la formación del profesorado (especialización, participación en reformas curriculares, inversión de tiempo en preparación) y la puntuación de sus alumnos.

Al igual que en FIMS, fue Japón el país con mejores resultados, muy por encima del segundo país de la tabla, Suecia. A la cola quedaron Escocia y la parte francófona de Bélgica (Gustafsson, 2010).

2.2.3. Antecedentes (3): SIMS

Casi dos décadas después del FIMS, la IEA realizó un segundo estudio sobre matemáticas en el aula, con datos recogidos entre los años 1980 y 1982 (IEA, 2011d). Debido al “intrínseco interés en la educación matemática [de determinados niveles educativos]” (Garden, 1987, p. 9), y también con el afán de comparar los resultados con el FIMS, la muestra constó de estudiantes de 13 años y preuniversitarios, cuyo programa académico comprende una parte sustancial (de alrededor de cinco horas semanales) de Matemáticas. Se excluyeron a los alumnos de 10 años. En este segundo estudio sobre las Matemáticas en el aula tampoco figuran Singapur ni España entre los 21 sistemas educativos que tomaron parte.

Como en el caso de FIMS, no solamente se prestó atención al nivel que mostraron los alumnos en los exámenes, sino también a las técnicas empleadas por los profesores.

Una vez más, los mejores estudiantes demostraron ser los japoneses en ambas poblaciones. Los que obtuvieron peores resultados fueron Suazilandia en la población de estudiantes de 13 años y Hungría entre los preuniversitarios (McKnight et al., 1987).

2.2.4. Antecedentes (4): SISS

Análogamente al caso de las Matemáticas, las Ciencias también fueron objeto de atención una segunda vez en un estudio internacional de la IEA. El Second International Science Study o SISS tuvo lugar en los años 1983 y 1984 y recogió datos de 23 países y 24 sistemas educativos (Canadá participó con sus sistemas educativos francés e inglés). Como novedad, Singapur sí tomó parte en este estudio, en el que la población comprendió a los alumnos de 10 años, a los de 14 años y a los del curso preuniversitario (tanto a los especializados en ciencias como a los no especializados, que formaban muestras separadas), con afán comparativo con el FIMS. Sin embargo, en esta ocasión España tampoco participó. La IEA (2011e) señala además que los países participantes tuvieron que desarrollar un informe sobre sus programas educativos en ciencias. Esta información, ya sean informes sobre el sistema educativo al completo o sobre áreas específicas, viene siendo habitual en las publicaciones oficiales de los estudios actuales, como PIRLS y TIMSS.

En el nivel de Educación Primaria, Singapur obtuvo una puntuación relativamente baja, quedando el tercero por la cola en la lista de 19 países analizada por Keeves (1992), con 51,8 puntos. La puntuación más alta en esta lista la obtuvo Japón con 66,4 puntos, y la más baja Nigeria, con 35,1 puntos.

Un resultado solo ligeramente superior fue el obtenido por los estudiantes de 14 años. Los alumnos de Educación Secundaria lograron una puntuación de 56.4 puntos, formando parte de un nutrido grupo de países con puntuaciones muy similares que incluía entre otros a Tailandia, Suecia, Inglaterra y Estados Unidos.

Sin embargo, en el caso de los estudiantes preuniversitarios especializados en Ciencias, Singapur sí se encuentra entre los países en cabeza, llegando a liderar la lista en el área de Biología. Estos altos niveles de acierto por parte de los alumnos

singapurenses (así como la baja puntuación de los estadounidenses y canadienses) supone, en opinión de Keeves (1992), un campo abierto de investigación.

2.2.5. TIMSS 1995

En 1995, la IEA decidió aunar las pruebas tanto de Ciencias como de Matemáticas bajo el Third International Mathematics and Science Study o TIMSS (IEA, 2011f). Sin embargo, al nacer con vocación de evaluación cíclica (cada cuatro años), la IEA aprovechó las siglas y hoy en día se conoce con el nombre de Trends in International Mathematics and Science Study.

En este estudio no solamente se analizan las competencias de los alumnos, sino también sus contextos educativos, mediante cuestionarios dirigidos tanto a los alumnos como a los profesores y los colegios. De hecho, uno de los puntos fuertes de TIMSS, y por lo que es valorado en la literatura, es por su intención de vincular los resultados obtenidos por los alumnos en las pruebas a las circunstancias educativas en que éstos están inmersos (Wang, 2001).

El TIMSS de 1995 evaluó a más de medio millón de estudiantes de cinco niveles:

- Alumnos de 9 años.
- Alumnos de 13 años. Este grupo, a diferencia de los demás, era de participación obligatoria por parte de los países que quisieran formar parte del estudio.
- Alumnos de último año preuniversitario, asistentes a cursos avanzados de Física.
- Alumnos de último año preuniversitario, asistentes a cursos avanzados de Matemáticas.
- Alumnos de último año preuniversitario no segregados por los cursos a los que asistían.

Además, en esta ocasión 46 sistemas educativos fueron evaluados (Mullis et al., 1998), contando con la participación, tanto de España (solamente con los alumnos

de 13 años, cursando entonces 7.º y 8.º cursos de EGB) como de Singapur (en las poblaciones de Educación Primaria y de Educación Secundaria).

En cuanto a los resultados de Matemáticas en los cursos de Educación Primaria, Singapur sobresalió con 552 puntos de media para los alumnos de 3.º curso (solamente superados por los coreanos, con 560 puntos) y con unos sobresalientes 624 puntos logrados por los alumnos de 4.º grado, quedando los primeros de la lista con una importante diferencia con el segundo país, Corea, que obtuvo 610 puntos. Además, sus compañeros de 1.º y 2.º curso de Secundaria lideraron sus respectivas listas con 601 y 643 puntos, en ambos casos, muy por encima del segundo país en puntuación, Corea, que logró 577 y 607 puntos en cada uno de los cursos (González Nagel et al., 1998).

España quedó en matemáticas en una posición muy inferior, con 448 puntos de media (más de 150 puntos menos que Singapur) obtenidos por los alumnos de 7.º curso de EGB y 487 puntos logrados por los alumnos de 8.º curso de EGB. Esto nos colocó en las posiciones 30 de 44 entre los del grupo más bajo y en la posición 32 de 46 entre los del grupo más alto.

En Ciencias, los alumnos de Educación Primaria de Singapur tuvieron unos resultados más discretos que en Matemáticas. Con 487 puntos, este país quedó en décimo puesto (de 24) entre los alumnos de 3.º curso y noveno puesto (de 26) entre los de 4.º curso. Sin embargo, los de Educación Secundaria, al igual que en Matemáticas, obtuvieron una imbatible puntuación en ambos cursos (544 en 1.º grado y 607 en 2.º grado).

Los alumnos españoles quedaron en Ciencias ligeramente mejor posicionados que en Matemáticas, al obtener los alumnos de 7.º curso de EGB la puntuación de 477 (puesto 25 de 44) y 517 puntos los de 8.º curso de EGB (puesto 27 de 46). Estas puntuaciones fueron similares a las de Nueva Zelanda, Noruega o Suiza.

En esta edición no se encontraron diferencias significativas en las puntuaciones obtenidas por los chicos y las chicas en Matemáticas, aunque en la mitad de los países, los chicos superaron a las chicas en Ciencias (González Nagel et al., 1998). Esta afirmación es válida tanto para Educación Primaria como para los alumnos de 13 años. Los resultados, además, estuvieron fuertemente relacionados con la

disponibilidad de recursos educativos en el hogar (ordenador, un lugar propio donde estudiar, 200 o más libros, etc.). Se comprobó que el número de horas de televisión llevaba aparejado una disminución de la puntuación obtenida por los alumnos (Martin et al., 1997).

2.2.6. TIMSS 1999

La edición de TIMSS de 1999 solamente se aplicó sobre alumnos de 13 años (1.º y 2.º curso de Secundaria, tanto en España como en Singapur). Todavía no había adquirido el nombre actual, pero la IEA decidió llamarlo TIMSS–R por Third International Mathematics and Science Study – Repeat (Martin, Gregory, Stemler y Foy, 2000).

TIMSS 1999 permitió hacer por primera vez una comparación en dos dimensiones distintas. Participaron 42 países, de los cuales 26 también lo habían hecho en 1995 en octavo grado y, por tanto, pudieron servirse de los resultados para establecer comparaciones. Además 19 países participantes en las pruebas de Educación Primaria de 1995 repitieron en esta ocasión, por lo que se pudo evaluar en una segunda ocasión a la misma cohorte de alumnos. España no participó en esta ocasión, aunque Singapur sí lo hizo.

Las diferencias entre sexos no mostraron evolución significativa respecto a la última edición de 1995. Solamente algunos países mostraron diferencias en Matemáticas, mientras que las diferencias en Ciencias se mantuvieron a favor de los niños en 16 de los países.

Los resultados volvieron a ser sobresalientes para Singapur. En Matemáticas, los 604 puntos de media logrados por los alumnos colocaron al país en primera posición, a una cómoda distancia del segundo país, Corea, que obtuvo 587 puntos. Como siempre, la media mundial fue escalada en 500 puntos.

Como afirma el informe de resultados del estudio en Matemáticas, esta puntuación media era comparable o excedía el percentil 95 de los alumnos de Chile, Filipinas, Marruecos o Sudáfrica (Mullis et al., 2000). Es decir, solamente los estudiantes sobresalientes de estos países consiguieron resultados comparables al

estudiante singapurense medio. De hecho, un impresionante 46% de los alumnos lograron llegar a la marca del 9.º decil, es decir, 616 puntos (la media mundial fue de tan solo un 15% de alumnos). Y un 75% llegaron al tercer cuartil, cuyo valor fue de 555 puntos (muy lejos de la media mundial, que alcanzó el 37% de ellos).

En Ciencias, los resultados fueron solo ligeramente peores, llegando Singapur a la segunda posición (recordemos que en 1995 quedó en primer lugar) con 568 puntos, un solo punto por detrás de Taiwán⁷ (Martin, Mullis, et al., 2000). El hecho de que los alumnos de Educación Primaria en 1995 tuvieran resultados rondando la media (mientras sus compañeros de Educación Secundaria sobresalían) y que esos mismos alumnos en Educación Secundaria obtuviesen resultados excelentes, pone de manifiesto que el énfasis en la formación en ciencias en Singapur comienza después de cuarto de Educación Primaria. En otros países, como Estados Unidos, Australia y Canadá ocurre justo el fenómeno contrario, teniendo en cuenta que el énfasis se encuentra en los primeros cursos de Educación Primaria y más tarde, aparentemente, ese énfasis va perdiendo intensidad conforme los alumnos van llegando a las etapas de Secundaria y Bachillerato.

En cuanto a la distribución de las puntuaciones, el 9.º decil (616 puntos) fue alcanzado por el 32% de los alumnos, y el tercer cuartil (558 puntos) por el 58% de ellos. En esta característica, tanto Singapur como Taiwán se desmarcaron fuertemente del resto de países.

2.2.7. TIMSS 2003

La edición de TIMSS de 2003 fue la primera en que la evaluación internacional pasó a denominarse oficialmente Trends in International Mathematics and Science Study, siendo la tercera desde que se convirtió en un estudio cíclico.

En esta ocasión, el estudio se centró en la resolución de problemas y las capacidades analíticas y de investigación de los estudiantes. Además, como en las

7 En el texto original se hace referencia a "Chinese Taipei". El especial estatus jurídico internacional de Taiwán, no reconocido como nación independiente por la ONU (ni por España) sino como provincia de China, obliga al uso de esta nomenclatura, que permite al gobierno de la isla participar en competiciones deportivas o formar parte de instituciones económicas sin ofender a la República Popular China, cuya política es la de que solamente existe una China, y Taiwán forma parte de ella (1996).

ediciones anteriores, se reunió abundante información relacionada con la educación en los países participantes; en este caso, para describir la cantidad, calidad y contenido de la instrucción en las aulas (IEA, 2011g).

Al igual que en 1995, el estudio se dirigió a dos poblaciones: los alumnos de 4.º grado y los de 8.º grado. Un total de 49 países tomaron parte en 2003, de los cuales, 48 lo hicieron en 4.º grado y 26 en 8.º grado. Singapur presentó a sus alumnos de ambas cohortes. España tampoco participó en esta ocasión, aunque sí lo hizo el País Vasco como región.

Uno de los resultados destacables del estudio fue que existió en general una correlación positiva entre la puntuación en Matemáticas y el uso de ordenadores, especialmente en Educación Secundaria. Los estudiantes que usaban ordenadores en casa y en el colegio fueron los que mejores resultados obtuvieron (Mullis, Martin, González Nagel y Chrostowski, 2004).

En cuanto a los resultados, una vez más en Matemáticas fue Singapur el país con la puntuación media más alta. Obtuvo en octavo grado 605 puntos, 16 más que el segundo país, Corea, y muy lejos de la media internacional de 467 puntos. En Educación Primaria también fue líder Singapur con 594 puntos, seguido de Hong Kong con 575. Cabe mencionar que las chicas lo hicieron mejor de media que los chicos en ambos niveles educativos, con unos estadísticamente significativos 8 puntos. La distribución de puntuaciones fue muy parecida a la de la edición de 1999. En Educación Secundaria, el noveno decil, situado en 625 puntos, fue alcanzado por el 44% de los alumnos, mientras que la marca del tercer cuartil, 550 puntos, fue superada por el 77% del total (con una media internacional del 7% y 23% respectivamente). En cuanto a Educación Primaria, las cifras fueron parecidas: 38% para el último decil y 73% para el último cuartil.

El País Vasco, que participó solamente con alumnos de 2.º curso de ESO, obtuvo 487 puntos (20 por encima de la media mundial), situándose a la altura de países como Italia y Eslovenia.

El informe TIMSS 2013 para Ciencias (Martin, Mullis, González Nagel y Chrostowski, 2004) muestra que una vez más en la mayoría de países (33 de 49) los

chicos de Educación Secundaria lo hicieron mejor que las chicas. Sin embargo, en Biología fueron las chicas las que superaron a los chicos. En Singapur en particular, las diferencias no fueron estadísticamente significativas (tan solo 3 puntos de diferencia en Educación Secundaria y 1 en Educación Primaria).

En cuarto curso, a diferencia de lo logrado ocho años atrás en TIMSS 1995, Singapur quedó en primer lugar con 565 puntos, 14 por encima de Taiwán. En Educación Secundaria siguió dominando la tabla, esta vez con menos distancia frente a Taiwán, pero bastante lejos (20 puntos) sobre el tercer país, Corea. Una vez más, en distribución de puntos en Educación Secundaria, Singapur quedó muy por encima de los demás países, con un 33% de alumnos superando los 625 puntos y un 66% los 550 puntos (la media mundial se encontró en el 6% para el último decil y en el 25% para el último cuartil). En Educación Primaria, aunque las cifras fueron más bajas, también fueron mejores que las de cualquier otro país: un 25% superó los 625 puntos y un 61% los 550.

El País Vasco alcanzó una puntuación algo superior a la media, 489 puntos (la media llegó a 474). Esto la situó a la altura de Italia e Israel. Su distribución fue parecida a la de Jordania, un 3% por encima de los 625 puntos, un 20% por encima de los 550 y un 11% por debajo de los 400 puntos.

2.2.8. TIMSS 2007

El cuarto ciclo de TIMSS tuvo lugar en 2007, con objetivos y planteamiento muy similares a los de cuatro años antes. De hecho, las dos poblaciones objetivo, 4.º y 8.º grados, fueron sometidas a examen esta vez.

La participación, cada vez más concurrida, ascendió a 59 países. España volvió a presentarse a través del País Vasco, nuevamente solo en 2.º curso de ESO. Singapur presentó a los alumnos correspondientes a los dos niveles educativos evaluados.

Los resultados en Matemáticas se pudieron asociar estadísticamente en muchos de los países al número de libros en casa, al nivel educativo de los padres (en Educación Secundaria) y a la presencia de ordenador en casa con conexión a

internet. Al igual que en 2003, el uso del ordenador en casa y en el colegio también estaba correlacionado positivamente con el resultado de las pruebas. Una vez más, las chicas singapurenses alcanzaron puntuaciones más altas que los chicos: 6 puntos en Educación Primaria y 15 en Educación Secundaria, aunque ésta no es una tendencia internacional.

Aunque siguió siendo más que notable la puntuación de Singapur, 599 puntos en 4.º grado, ésta le hizo quedar por debajo de la de Hong Kong (607 puntos). En Educación Secundaria los tres primeros países obtuvieron puntuaciones muy similares: Taiwán (598), Corea (597) y Singapur (593), quedando bastante lejos de Hong Kong, que con 572 puntos quedó en cuarto lugar. La distribución de puntuaciones fue similar a la de años anteriores, bajando ligeramente el porcentaje de alumnos de Educación Secundaria, que llegó a la cota de los 625 puntos respecto a 2003.

El País Vasco quedó justo por debajo de la media, escalada en 500 puntos, siendo su puntuación de 499 puntos, la misma que Armenia y muy similar a la de Australia y Eslovenia. Curiosamente, el porcentaje de alumnos alcanzando las marcas de 625, 550, 475 y 400 puntos fue mayor o igual que la mediana internacional.

En Ciencias, por su parte, Singapur quedó en primer lugar en ambas etapas, Educación Primaria y Educación Secundaria (Martin et al., 2008b), seguida en ambos casos por Taiwán. En 4.º grado, además, la diferencia fue notable entre Singapur (con 587 puntos) y Taiwán (557). En 8.º grado Singapur obtuvo 567 puntos frente a los 561 de Taiwán. Como cabe esperar por los resultados, en 4.º grado los porcentajes de alumnos que superaron las marcas de 625 y 550 puntos fue muy superior a los del resto de países, un 36% y un 68% respectivamente (frente al 7% y el 34% de mediana internacional). En Educación Secundaria las diferencias con los países inmediatamente por detrás, aunque existentes, no fueron tan acusadas como en el caso de sus compañeros de 4.º grado.

Al igual que en la prueba de Matemáticas, en Ciencias el País Vasco quedó ligeramente por debajo (498) de la media de 500 puntos, alcanzando una puntuación similar a la de Italia y Escocia. Y también, de forma similar, las distribuciones de puntuaciones fueron mejores que la mediana internacional, a pesar de que la puntuación no alcanzó la media.

2.2.9. TIMSS 2011

La edición de 2011 de TIMSS fue la segunda vez que España participó en el estudio. Nuevamente los niveles educativos analizados fueron 4.º y 8.º grados. El Ministerio de Educación, Cultura y Deporte decidió que, dado que España iba a participar en el informe PISA y que éste ofrecía datos similares para Educación Secundaria, solamente los alumnos de Educación Primaria serían presentados al estudio (INEE, 2012).

En esta ocasión se presentaron 63 países al estudio, al que no faltó, como desde la primera edición, Singapur.

Según González y Bakieva (2013), en esta edición tanto de PIRLS como de TIMSS deja de escalarse la media a 500 puntos, para pasar a llamar a este valor "Punto de referencia". La media internacional se obtiene, pues, como la media aritmética simple de las puntuaciones promedio de todos los países que participan en la prueba. Esta situación puede dar lugar a confusión, pues se pueden encontrar dos puntuaciones para cada país: la obtenida a partir de las medias de los alumnos y la obtenida al escalar dicha puntuación para que la media internacional sea 500, como se ha hecho en todas las ediciones anteriores. Las puntuaciones mostradas a continuación corresponden a valores no escalados.

Una de las conclusiones del estudio fue que, en la mayoría de países, los alumnos no fueron capaces de aplicar con el mismo éxito el razonamiento y la aplicación de conocimientos que la memoria, el cálculo mental o la descripción (IEA, 2013b).

Los resultados globales fueron, según los informes de la IEA (Martin et al., 2012; Ina V. S. Mullis et al., 2012), los siguientes:

En Ciencias, España (que, recordemos, solamente participó en el subestudio de Educación Primaria) obtuvo 505 puntos, superior a la media internacional (486 puntos) pero inferior tanto a la media de la OCDE, como a la de la Unión Europea (523

y 521 puntos respectivamente). España quedó al mismo nivel que Rumanía y Polonia, quedando en el puesto 28, de un total de 50 países.

Singapur logró 583 puntos en 4.º grado, solamente 4 puntos menos que Corea. Sin embargo, en Educación Secundaria el resultado fue considerablemente alto, 590 puntos, nada menos que 26 más que el siguiente país con mayor puntuación (Taiwán). A pesar de no haber conseguido la mayor puntuación, Singapur siguió siendo el país en el que mayor porcentaje de alumnos superaron los 625 puntos (un 33% en 4.º curso de Educación Primaria y un 40% en 2.º curso de Secundaria).

Por su parte, en Matemáticas, Singapur siguió consolidando su liderazgo mundial. En Educación Primaria se situó en primer lugar con 606 puntos, con resultados muy similares a los de Corea y Hong Kong. De hecho, como en anteriores ocasiones, un impresionante 43% de los alumnos de Singapur superó la cota de los 625 puntos y un 78% la de los 550, donde la mediana internacional fue que un 4% de alumnos superaron los 625 puntos y un 28% superaron los 550. Para ambas marcas, las cifras españolas fueron un 1% y un 17% de alumnos, respectivamente.

En Educación Secundaria, donde Singapur consiguió la segunda mejor puntuación (611 puntos), también la diferencia entre los tres primeros países (Corea, Singapur y Taiwán) es muy corta. Aquí, un 48% de los alumnos superaron los 625 puntos, y un 73% los 550 puntos.

En Matemáticas de Educación Primaria, España logró 482 puntos, por debajo de la media internacional (491 puntos) y muy por debajo de la media de la OCDE (522 puntos). Dentro de Europa, solamente Polonia y Rumanía obtuvieron peores resultados. El informe español de TIMSS 2011 señala que “la puntuación de España, inferior a la de la mayoría de los países de nuestro entorno, parece reafirmar la necesidad de revisar la atención dedicada a las matemáticas en el sistema educativo español” (González y Bakieva, 2013, p. 48).

España, con la misma puntuación que Rumanía, quedó en el puesto 32 de los 50 países que participaron. Singapur alcanzó la puntuación más alta con 606 puntos, 124 puntos más que España (Mullis, Martin, Foy y Arora, 2012).

Cabe destacar que Singapur, que se encuentra entre los países que realizaron en 2011 las pruebas PIRLS y TIMSS, tuvo más de un 34% de alumnos que estuvieron por encima de los 625 puntos, tanto en PIRLS como en TIMSS (IEA, 2013b).

2.2.10.TIMSS 2015

La última edición celebrada hasta la fecha del estudio de la IEA tuvo lugar en 2015, y en ella participaron en total 49 países.

En esta ocasión, Singapur obtuvo los mejores resultados de entre todos los países participantes, tanto en Matemáticas como en Ciencias, en los niveles educativos que formaron parte del estudio (como en todas las ediciones anteriores, 4.º y 8.º cursos o equivalentes según el país), con puntuaciones significativamente más altas que el segundo país, tanto en Matemáticas como en Ciencias de 8.º curso (15 puntos en Matemáticas y 16 puntos en Ciencias), siendo mucho más discreta la diferencia en los resultados de 4.º curso (que fueron 3 puntos en Matemáticas y 1 solo punto en Ciencias).

Los resultados, tanto de Singapur como de España, fueron los siguientes (Martin, Mullis, Foy y Hooper, 2016; Mullis, Martin, Foy y Hooper, 2016):

En Matemáticas de 4.º curso, Singapur logró 618 puntos, por encima de Hong Kong (615 puntos) y Korea (608 puntos). España, en este nivel, superó ligeramente la media internacional de los 500 puntos (no así la media de la OCDE, situada en 525 puntos) con 505 puntos en total, obteniendo resultados similares a Italia y Croacia.

Los alumnos de 8.º grado de Singapur llegaron a los 621 puntos en la prueba de ciencias, por delante de Korea que consiguió 606. España no presentó alumnos a esta prueba.

Por su parte, en Ciencias de 4.º curso superaron en un punto a Korea, el segundo país en puntuación, al conseguir 590 puntos frente a los 589 de los coreanos. Los alumnos españoles alcanzaron una puntuación de 518, superior a la media

internacional (aunque nuevamente inferior a la media de la OCDE, que llegó a los 528 puntos) y similar a la de Eslovaquia, Holanda e Italia.

Por último, los resultados de 8.º curso de Singapur en Ciencias alcanzaron los 597 puntos, significativamente por encima del segundo país, Japón, que consiguió 571.

Los resultados de las pruebas evidencian una mejora tanto en Matemáticas como en Ciencias por parte de los alumnos españoles respecto de la edición de TIMSS de 2011. De hecho, España es el país participante que más ha mejorado sus resultados respecto a 2011, consiguiendo además reducir el porcentaje de alumnos rezagados y aumentando el de alumnos excelentes tanto en Matemáticas como en Ciencias (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2016). Mientras, los alumnos de Singapur solamente muestran mejora significativa en Matemáticas, pero no en Ciencias.

2.3. Programme for International Student Assessment (PISA)

PISA son las siglas de *Programme for International Student Assessment*. Se trata de un estudio internacional llevado a cabo por la OCDE que tiene una regularidad de tres años. El primer estudio PISA se llevó a cabo el año 2000, por lo que la edición de 2015, la más reciente en la fecha de realización del presente informe, fue la sexta. España ha participado todas las veces en el programa.

Es precisamente el patrocinio de la OCDE la característica que lo distingue de otras pruebas con más recorrido, como las llevadas a cabo por la IEA y que a su vez garantiza mayor visibilidad a sus resultados (Murphy, 2010).

El programa PISA tiene como sujeto de estudio a los estudiantes de 15 años y evalúa de forma general las áreas de comprensión lectora, matemáticas y conocimiento científico, además de requerir por parte de los alumnos que rellenen un cuestionario sobre sí mismos.

El programa PISA está diseñado para su implantación en forma cíclica. Cada ciclo comprende tres ediciones. La primera edición de cada ciclo, a pesar de evaluar las competencias en lectura, matemáticas y ciencias, siempre se centra en la lectura, la segunda edición pone su interés en matemáticas y la tercera edición se centra más en la materia de ciencias. El segundo ciclo completo concluyó con la edición de 2015, y en 2018 comenzará uno nuevo.

En el área de matemáticas, se pretende medir la alfabetización matemática o la competencia matemática (ambas utilizadas como sinónimos en diferentes ediciones). Ésta se define como la “capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos que presenten necesidades para su vida individual como ciudadano” (Rico Romero, 2007, p. 49).

Los baremos de puntuación son similares en valor a los de las distintas ediciones de TIMSS y PIRLS. La puntuación media se escala a 500 puntos, con una desviación típica de 100, siendo la máxima puntuación un número cercano a los 750 puntos (dependiendo de la escala aplicada). Con estas puntuaciones se definen seis niveles distintos de aptitud, que se detallan en el Anexo 1.

Este estudio, en todas sus ediciones, está impregnado de un fuerte carácter de evaluación de los enfoques de aprendizaje de los alumnos ante las materias examinadas. Tanto es así, que en la primera edición se diseñó una tabla con trece características relacionadas con enfoques frente al aprendizaje, a las que se refirieron una serie de preguntas que se plantearon a los alumnos en forma de cuestionario. A estas preguntas los alumnos respondían mediante escalas de frecuencia (“casi nunca”, “a veces”, “a menudo” y “siempre”) o de conformidad (“completamente en desacuerdo”, “bastante en desacuerdo”, “bastante de acuerdo” y “completamente de acuerdo”). Estas características se pueden comparar con los resultados de las pruebas de aptitud y establecer comparaciones entre los distintos países y sus enfoques frente al aprendizaje y entre éstas y los resultados académicos.

2.3.1. PISA 2000

El primer estudio, centrado en la competencia lectora, se dirigió en primer lugar a 32 países, de los cuales solamente 4 no eran miembros de la OCDE. Sin embargo,

la rápida repercusión del estudio hizo tomar la decisión de extender el estudio a 11 países no miembros de la OCDE, que se sometieron al mismo un año después. Entre los 43 países que participaron no se encuentra Singapur, aunque sí España.

Uno de los resultados clave, aparte de la tabla de puntuaciones de los diferentes países, se encuentra en que solamente una quinta parte de la nota obtenida por los alumnos en lectura se debe a sus enfoques de aprendizaje (Artlet et al., 2003). Esto significa que, mientras existen muchos otros factores que afectan al resultado final de las pruebas, aproximadamente dos tercios de la variación en la tendencia a controlar el propio aprendizaje, se explican a través de los niveles de motivación y la autoestima. Por lo tanto, el desarrollo de técnicas de aprendizaje variadas y autogestionadas, que es clave para lograr aprendizajes eficaces, pasa en primer lugar por obtener buenos niveles de autoestima y motivación.

En lo que a números respecta, en lectura España logró 493 puntos, en ciencias 491 puntos y en matemáticas 476 puntos. Teniendo en cuenta que la nota media global de la OCDE se escaló en 500 puntos (al igual que se hacía en un principio en TIMSS), España quedó por debajo de la media en las tres áreas de conocimiento, y muy particularmente en el caso de las matemáticas, siendo estos resultados estadísticamente significativos (Pajares Box, 2005). Una interpretación positiva de los datos se encuentra en la desviación típica, que se puede considerar como una medida de la igualdad de oportunidades entre los alumnos, ya que mide la diferencia entre los mejores y los peores alumnos. En España se situó por debajo de la desviación típica global de la OCDE, en particular en lectura.

Las puntuaciones más altas fueron las de Finlandia en lectura (556 puntos), la de Japón en matemáticas (557 puntos) y la de Corea en ciencias (552 puntos).

2.3.2. PISA 2003

Como todos los segundos estudios de cada ciclo, el de 2003 se centró en las matemáticas y, en particular, en cuanto al proceso educativo, incluyó también las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas. En total, las pruebas se diseñaron de forma que se dedicase más de la mitad del tiempo total a las matemáticas. Esto

permitió incluir dos escalas en la prueba, *cantidad e incertidumbre*, a las dos ya presentes en el año 2000: *cambio y relaciones* y *espacio y forma* (OCDE, 2004).

En esta ocasión participaron 41 países, los 30 de la OCDE y 11 países más (entre los que no se encuentra Singapur).

En cuanto a los resultados en matemáticas, España destaca junto con Grecia, Italia, Corea, México, Portugal y Turquía en el hecho de que las medias en las cuatro escalas es muy regular, frente a otros países en los que existen grandes diferencias. Esto se puede interpretar como que el currículo existente en aquel momento estaba bien equilibrado. No obstante, de acuerdo al gasto institucional por alumno, los resultados fueron menores de los esperados.

El resultado final español en matemáticas fue de 485 puntos, mientras que la mayor puntuación en esta materia correspondió a Hong Kong (550 puntos). La nota media de la OCDE fue de 489 puntos.

2.3.3. PISA 2006

El año 2006 fue el turno de las ciencias dentro del ciclo con que el estudio fue concebido. Una de las novedades que trajo esta edición fue que las preguntas que se dirigieron a los alumnos sobre sus actitudes frente al aprendizaje en ciencias se plantearon en el propio contexto de los estímulos de que constaban las pruebas. Otra consistió en la formulación de preguntas, a modo de prueba, en formato electrónico (vídeo, animaciones y simulaciones).

57 países tomaron parte en el estudio: los 30 países de la OCDE (entre los que se encuentra España) y 27 países invitados más. Singapur, una vez más, no tomó parte en este estudio.

España logró esta vez en matemáticas 480 puntos, una puntuación inferior (pero no significativamente) a la obtenida tres años antes. Esto la sitúa en el puesto

32 de 57, a una importante distancia de Taiwán, que quedó en cabeza con 549 puntos (OCDE, 2008).

2.3.4. PISA 2009

El comienzo del segundo ciclo de pruebas PISA trajo consigo una segunda edición en 2009 en la que el foco de atención se dispuso sobre la competencia lectora. La incorporación de estímulos electrónicos que comenzó en 2006 prosiguió esta vez, aplicada a la medición de la capacidad de los estudiantes para leer textos digitales. Ésta fue una prueba opcional, tomada por 20 de los 65 países participantes.

Éste fue el primer año en que Singapur entró en el estudio, y lo hizo notablemente bien. Según la OCDE (2010a), aunque el primer puesto en matemáticas fue para Shanghai, que logró 600 puntos, Singapur fue el segundo con 562 puntos. A pesar de esto, fue Singapur el país en el que más porcentaje de los alumnos superó los 708 puntos, un 4,6%.

España fue evaluada con una puntuación cercana a las de las ediciones anteriores, 483 puntos (la misma puntuación que Italia), muy similar a la de Estados Unidos. La media de la OCDE, como sabemos, fue escalada a 500 pero la media mundial se calculó en 496 puntos, por lo que podríamos afirmar que España tuvo una posición cercana a la media mundial en esta ocasión.

En cuanto a la comprensión lectora, de interés en el caso de Singapur por examinarse en la lengua de instrucción, que en la mayoría de los casos no coincide con la lengua materna, Singapur alcanzó los 526 puntos, quedando segunda, solamente por detrás de Hong Kong (con 533). España quedó con 481 puntos. La media de la OCDE fue de 494.

Singapur tuvo además el segundo mayor porcentaje de alumnos (12,3%) que alcanzaron el nivel 5 o 6 sobre 6 (ver Anexo 1) en los tres campos (matemáticas, ciencias y comprensión lectora), solamente por detrás de Shanghai (14,6%), y muy por encima de la media de la OCDE, que se quedó en el 4,1% de los alumnos (OCDE, 2010a).

2.3.5. PISA 2012

El estudio de PISA de 2012 se centró nuevamente en las matemáticas como área de evaluación principal. Además, evaluó por primera vez los conocimientos financieros de los alumnos. Según el informe oficial del estudio (OCDE, 2010b), participaron entonces 64 países.

En cuanto a los resultados en matemáticas, Singapur mejoró respecto a la prueba anterior, alcanzando los 573 puntos (frente a los 562 del año 2009), pero sin llegar a superar a Shanghai que volvió a quedar en primera posición con 613 puntos. Aun así, un 40% de los alumnos de Singapur habían logrado alcanzar las puntuaciones de los niveles 5 o 6 en las escalas PISA (ver Anexo 1). Es un resultado notable que los cuatro países que quedaron en los primeros puestos (Shanghai, Singapur, Hong Kong y Taiwán) habían mejorado en matemáticas respecto a 2009.

En España no se apreció variación alguna en estos resultados una vez más, como indican sus 484 puntos de media, que la dejó en una situación muy similar a la de los países con los que se podía comparar ya con anterioridad (como Italia y Estados Unidos) y 10 puntos por debajo de la media de la OCDE.

En lectura, Singapur volvió a entrar en la cabeza de la tabla, quedando tercera con 542 puntos de media, aunque a una importante distancia por debajo de Shanghai (que obtuvo la mayor puntuación, 570 puntos). Por su parte, la puntuación de España, 488 puntos, siguió por debajo de la media global (496).

2.3.6. PISA 2015

La edición más reciente a la fecha de redacción del presente informe fue la de 2015, en la que participaron 72 países (el número más alto de todos los informes PISA) y se centró en el área de Ciencias, con matemáticas, lectura y resolución colaborativa de problemas como áreas de evaluación de menor interés. Los países participantes también tenían como opción ser evaluados en conocimientos financieros (OCDE, 2016a).

En ciencias, una vez más Singapur superó a todos los demás países participantes por una amplia diferencia, al alcanzar 556 puntos, 18 más que el segundo país, Japón. España alcanzó la cifra de 493 puntos, exactamente igual que la media de la OCDE. La diferencia en puntos de España respecto a la edición de 2012, si bien es positiva, no es estadísticamente significativa, especialmente si tenemos en cuenta que la media de la OCDE descendió entre las ediciones de 2012 y 2015. En cualquier caso, España siguió teniendo resultados similares a los de los mismos países con los que se comparaba anteriormente, como Estados Unidos, Austria y Francia (OCDE, 2016c).

En matemáticas, una vez más Singapur encabezó la tabla con 564 puntos, nuevamente muy por encima del segundo, Hong Kong, que obtuvo 548 puntos. España, por su parte, consiguió 486 puntos, 4 puntos por debajo de la media de la OCDE. Aunque la diferencia entre la puntuación de España y la puntuación media de los países miembros de la OCDE se redujo en 6 puntos entre 2012 y 2015 y a pesar de los mensajes positivos lanzados desde el gobierno de España (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2016), el informe señala que la diferencia en 2015 sigue siendo estadísticamente significativa y que por tanto España no alcanza una puntuación comparable a la de la media de la OCDE.

Por último, el primer lugar en competencia lectora vuelve a ser logrado por Singapur, con 535 puntos (conviene recordar que el inglés, que es la lengua en la que se realizan las pruebas PISA en Singapur, no es la lengua materna para un importante porcentaje de los alumnos singapurenses). Por su parte, España si obtiene una mejora significativa al conseguir 496 puntos, 3 puntos más que la media de la OCDE.

2.4. Resumen y conclusiones

Como hemos visto, Singapur domina el panorama mundial (junto con Corea, Hong Kong y Taiwán) tanto en Matemáticas como en Ciencias, aparte de gozar de una muy destacable posición en PIRLS. Y todo ello, a pesar de que la lengua materna y la lengua en que se presentaron todas las pruebas a los alumnos son, en un gran porcentaje, diferentes.

A modo de resumen, y reuniendo los datos de la literatura al respecto (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2016; Kaur, 2014b; Mullis et al., 2016) recopilamos la posición de Singapur en las pruebas que ha realizado en la Tabla 1.

Tabla 1

Posiciones de Singapur en las ediciones en que ha participado de TIMSS y PISA

TIMSS			PISA	
Año	Puesto		Año	Puesto
	4.º grado	8.º grado		
1995	1	1	2009	2*
1999	-	1	2012	2*
2003	1	1	2015	1
2007	2	3*		
2011	1	2		
2015	1	1		

* El puesto obtenido si se excluyen las regiones no consideradas países (como Shanghái o Taiwán) asciende en 1. *Fuente:* Elaboración propia.

Según Klieme (2016), las puntuaciones en las pruebas PISA y TIMSS están fuertemente relacionadas. Aunque las pruebas de TIMSS están más enfocadas al currículo que reciben los alumnos y las de PISA se orientan más al desempeño de tareas que apuntan a la capacidad de los alumnos para desenvolverse como ciudadanos y para continuar aprendiendo, el 85% de la puntuación en las pruebas de matemáticas de TIMSS de un país se puede predecir mediante la puntuación obtenida por ese país en PISA. La mayor parte del resto de la puntuación (hasta el 97%) se puede predecir a través de otras dos diferencias entre ambos estudios:

1. Mediante las diferencias en las edades de las muestras participantes en ambas pruebas. Mientras que PISA elige a los alumnos por edad, TIMSS elige a los alumnos por curso que están estudiando. Por tanto, la media de edad de TIMSS es, para un mismo nivel educativo, menor que para el estudio análogo de PISA.
2. Mediante las respectivas medidas de la Oportunidad de Aprender (Opportunity To Learn u OTL). Ésta es una medida que representa la calidad de los recursos, condiciones escolares, currículo y enseñanza que reciben los estudiantes (Banicky, 2000, octubre). Ambos estudios realizan su propia medida de la OTL de cada país, obteniéndose resultados diferentes en ambos.

A pesar de que tanto PISA como TIMSS guardan una estrecha relación y hasta cierto punto miden las mismas variables, TIMSS trae consigo una información extra relativa a la calidad de currículo de Matemáticas, tal y como se ve implementado

en las aulas (Klieme, 2016), y es por esto por lo que es conveniente tomar ambos estudios en cuenta.

Según Dindyal (2006), se han identificado una serie de factores que parecen ser los que más contribuyen al éxito de Singapur en las pruebas internacionales (específicamente en TIMSS):

1. La actitud de los alumnos hacia las matemáticas es positiva, o por lo menos más positiva que en otros países de su entorno que obtienen buenos resultados. De hecho, en 2003 tres de cada cuatro estudiantes singapurenses de segundo curso de Secundaria declararon disfrutar aprendiendo matemáticas.
2. Los estudiantes gozan de un elevado índice de autoconfianza en cuanto al aprendizaje de matemáticas.
3. Los estudiantes valoran las matemáticas, para ellos se trata de conocimientos valiosos.
4. Existe una alta aspiración educacional en los alumnos. Más de la mitad aspiran a obtener un título universitario.
5. Dedicar una importante cantidad de tiempo a hacer deberes.
6. Los colegios poseen muchos recursos disponibles.
7. Nueve de cada diez profesores perciben sus escuelas como seguras.
8. Existen currículos diferenciados para adaptarse a las capacidades de los estudiantes.
9. El 80% de los conceptos que aparecen en TIMSS quedan cubiertos por el currículo. No obstante, según afirman los propios autores de TIMSS, las pruebas realizadas sobre los ejercicios desarrollados muestran que eliminar los que no están cubiertos por el currículo de un país tiene poco o ningún efecto sobre el patrón general de resultados. Es más, las pruebas de comparación de currículos con la primera edición de pruebas TIMSS mostraron que el país en el que existen mayores diferencias entre el currículo de Matemáticas y los conceptos de las pruebas es Austria, con un 75% de coincidencias. Además, alrededor de la mitad de los países contenían en sus currículos de Matemáticas el 85% o más de los conceptos aparecidos en TIMSS (Mullis et al., 1998).
10. El ministerio singapurenses está muy pendiente del currículo de matemáticas en particular.

Aunque muchos de estos factores también están presentes en otros países, los relacionados con la afectividad (actitud, autoconfianza y el valor atribuido a las matemáticas) y con la segregación según las capacidades de los alumnos distinguen Singapur del resto, no solo de su entorno sino de la comunidad internacional. Su puesto destacado en la evaluación del rendimiento matemático internacional justifica la razón de nuestra elección y de nuestro particular análisis.

2. Los programas de evaluación internacional

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

3.1. Geografía, historia y sociedad de Singapur

Para entender el sistema educativo de Singapur, sus particularidades y sus idiosincrasias, conviene dar unas pinceladas que reflejen los aspectos más relevantes de la geografía, historia y sociedad del país, que nos ayuden a contextualizarlo.

3.1.1. Geografía

La República de Singapur es un pequeño estado situado aproximadamente 1º por encima del ecuador, al sur de la Península de Malasia, con la que está unida mediante puentes artificiales, como se aprecia en las Figuras 1 y 2.



Figura 1: Localización de Singapur en el sudeste asiático.

Fuente: Google Maps.

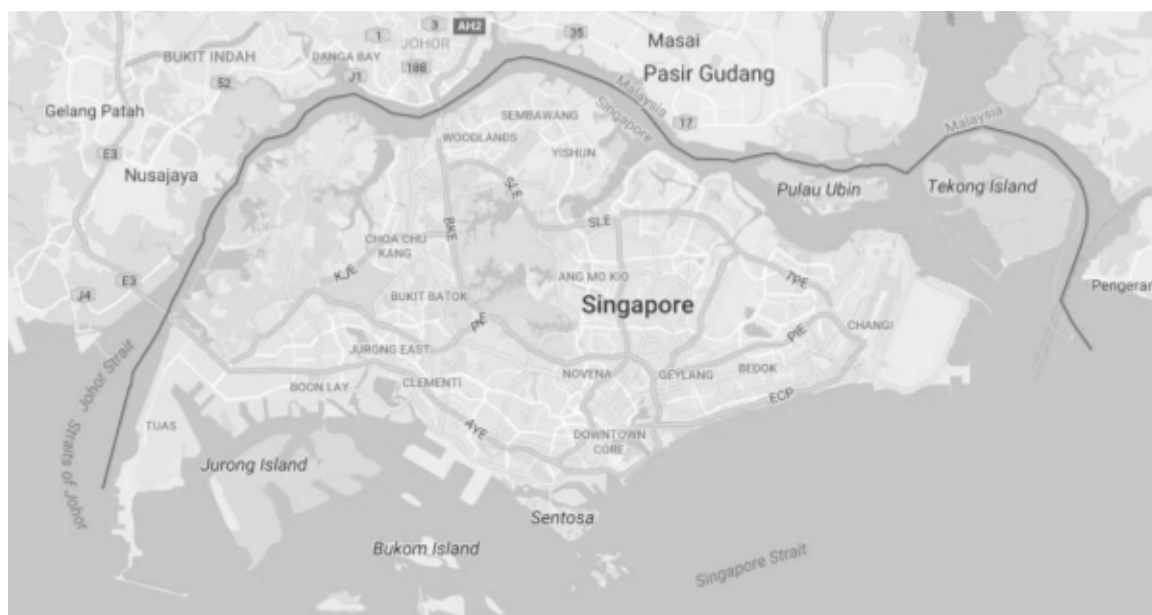


Figura 2: Mapa de Singapur.

Fuente: Google Maps.

Su superficie total es de apenas 720 kilómetros cuadrados, con una densidad de población que supera los 7.000 habitantes por kilómetro cuadrado (una densidad muy alta comparada con la de España, que no llega a los 100 habitantes por kilómetro cuadrado, o incluso la de la ciudad de Madrid, que apenas supera los 5.200 habitantes por kilómetro cuadrado). Como veremos más adelante, cada uno de los más de 5 millones y medio de habitantes del país forma parte de cuatro grupos étnicos principales: chinos (mayoritarios), malayos⁸, indios y otros. Esta diversidad étnica se refleja además en la existencia de cuatro lenguas oficiales: chino (mandarín), malayo, tamil e inglés.

Singapur se compone oficialmente, aparte de la isla principal, de 63 pequeñas islas. Muchas de ellas han ido ampliando su superficie a lo largo del tiempo, al irse ganando terreno al mar. Diez de estas islas, hoy en día, forman incluso una gran isla llamada Jurong Island (Cornelius-Takahama, 2001).

⁸ Existen tres conceptos susceptibles de confusión. El primero es el del habitante de Malasia. El segundo, el de miembro perteneciente a la etnia procedente de la región que hoy en día comprende Malasia, Indonesia, Tailandia y multitud de islas cercanas, y se cree oriundo de la península de Malaca. El tercero es la lengua que hoy en día es oficial en Malasia y Singapur entre otros. Para los tres conceptos disponemos de dos voces: “malasio” y “malayo”. Según la Real Academia Española, “malasio” es la forma preferida para referirnos a un habitante de Malasia. Por su parte, aunque “malayo” también es aceptable para ese uso, el significado principal de esa voz se refiere a la etnia y a la lengua a que nos hemos referido anteriormente. De la misma forma, en inglés para hablar tanto de la lengua como del grupo étnico se utiliza “malay”, y para hablar de un habitante de Malasia se recurre a “Malaysian”. Nosotros utilizaremos el término “malayo” en su sentido étnico.

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

Dada su situación geográfica, goza de un clima tropical en el que las temperaturas varían entre los 22 y los 35°C, con abundantes lluvias durante todo el año.

La bandera de Singapur (Figura 3) fue creada en 1959 cuando el territorio ganó el estatus de estado autónomo bajo mando británico, y más adelante adoptada como bandera nacional en 1965 al alcanzar Singapur la independencia total. Consta de dos secciones horizontales y de igual tamaño, la superior de color rojo y la inferior de color blanco. En la parte superior izquierda se sitúa una media luna con cinco estrellas blancas dispuestas en forma circular. Según Sim (2014), el color rojo simboliza la hermandad universal y la igualdad del hombre, y el blanco la eterna pureza y virtud. Por su parte, la media luna representa el surgimiento de una joven nación. Junto a ella se encuentran los ideales de democracia, paz, progreso, justicia e igualdad simbolizados por las cinco estrellas.



Figura 3: Bandera de Singapur.

Fuente: Singapore Arms and Flag and National Anthem Rules, Revised Edition 2004

3.1.2. Historia

Existen pocos registros escritos sobre la historia de Singapur anteriores al siglo XIX. En realidad, a principios de los años 1800, no era más que una aldea de pescadores con apenas doscientos habitantes.

En 1819, Thomas Stamford Raffles, de la Compañía Británica de las Indias Orientales, estableció en esta aldea un puesto de comercio (Tan, Chow y Goh, 2008)

y firmó un tratado para adquirir la isla, a partir de una situación de disputa sucesoria en el sultanato Johore-Riau, al que pertenecía en aquél entonces.

La particular situación geográfica aumentó rápidamente la prosperidad de Singapur y convirtió a la isla en un lugar atractivo para el establecimiento de población inmigrante procedente del sur de China, de diferentes lugares del archipiélago malayo y de diferentes partes de la India (Chia, 2011). La actividad económica del lugar consistía en la importación de materias primas de los países vecinos (goma, café, pimienta, copra, aceite de coco, madera etc.) para procesarlos y ser exportados a Occidente. A su vez, otros productos manufacturados como maquinaria eran importados de Europa y Estados Unidos y redistribuidos a los países de la región (Swee-Hock, 2012).

En la actualidad, según Bustelo Gómez (1994), la población se reparte en una mayoría (78%) de origen chino (de etnias predominantemente fujian, cantonés y kakka) y unas minorías malaya (15,5%) e hindú (predominantemente tamiles, con un 6,5% de la población). Esta diversidad cultural, a la que hay que sumar la influencia de Gran Bretaña, hace que hoy en día haya cuatro lenguas oficiales en un estado tan pequeño: inglés, chino, malayo y tamil, ya referidas.

Aunque propiedad británica, Singapur fue gobernada por la Compañía Británica de las Indias Orientales hasta 1857, año en que el Motín de Sepoy en India marcó el principio del fin de la Compañía, que desapareció un año después. El gobierno se transfirió primero a la India Británica, quien gobernó Singapur (junto con Penang y Malacca, los tres territorios que conformaban las Colonias del Estrecho) hasta diez años más tarde, cuando se transfirieron a la Corona Británica (Chia, 2011).

La isla formó parte de Gran Bretaña como colonia durante casi un siglo más. Este periodo de dominio británico solamente fue interrumpido por la Segunda Guerra Mundial, cuando Singapur fue ocupada por Japón. Aunque los británicos volvieron a la isla tras la rendición de Japón y el fin de la guerra, la población de todo el sudeste asiático colonial se había insuflado de un espíritu nacionalista que desembocó en la creación de la Federación Malaya en 1948. Este nuevo protectorado no incluía a Singapur, que siguió manteniendo, según Chia, el estatus de colonia británica. Las siguientes dos décadas fueron cruciales para la historia de Singapur.

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

Con el objeto de oponerse a la influencia comunista que se extendía por la región, en Singapur se permitió la celebración de elecciones limitadas al Consejo Legislativo para dar una visión de estado. En estas elecciones, que tuvieron lugar en 1955, el partido vencedor (el Frente Laborista) declaró que su objetivo principal era la consecución de un completo autogobierno y la unión con la Federación Malaya. Los años siguientes estuvieron centrados en conversaciones internas y externas que condujesen a la confección de una nueva constitución y la completa independencia de Gran Bretaña (Corfield, 2010).

En 1962 hubo un referéndum para la adhesión de Singapur a la Federación Malaya. No se trataba de un referéndum para decidir la adhesión a la Federación Malaya, sino para decidir los términos en los cuales se debía realizar dicha adhesión. Las tres opciones posibles implicaban formar parte de la Federación, aunque en términos distintos, desde la incorporación absoluta de Singapur a Malasia hasta la integración en la Federación Malaya en un estatus no inferior al que entonces poseía Borneo. Un 71% de los votos fue a favor de la adhesión en forma absoluta, de modo que automáticamente todo ciudadano de Singapur se convertiría en ciudadano de Malasia. Sin embargo, hubo un 25% de votos en blanco, que indicaban el rechazo a la adhesión. Esta opción, contraria al gobierno, fue promovida por el partido Barisan Sosialis (Drysdale, 2008).

Sin embargo, la pertenencia de Singapur a la Federación Malaya duró poco, pues en agosto de 1965 Singapur se escindió y se declaró una república independiente (Hagiwara, 1973).

Como reacción al alza comunista en China (comandada por Mao Tse-tung) y la guerra de Vietnam, en 1967 se formó la Asociación de Naciones del Sudeste Asiático (ASEAN), de la que Singapur es nación fundadora (Hagiwara, 1973; Ministerio de Asuntos Exteriores de Singapur, s.f.). Ese mismo año, Singapur lanzó su propia moneda, el dólar singapurense o SGD (Corfield, 2010).

En 1971, y como último y fuertemente anhelado paso hacia la ya declarada independencia, Gran Bretaña retiró sus efectivos militares de la joven nación (Ministerio de Educación de Singapur, 2007).

En aquellos años, Singapur se enfrentó al mayor desafío hasta la fecha: la construcción de un Estado sin la presencia previa de una nación (Hill y Lian, 2013). Esta nación debía ser construida sobre el pluralismo lingüístico y étnico que durante casi dos siglos había caracterizado a la población de la isla, y a las élites gobernantes de Singapur no se les pasó por alto el crucial papel que la educación tiene en ese proceso de construcción.

El delicado equilibrio social que el estado debía mantener se basó, en la primera década de existencia de Singapur, en un esfuerzo por crear una igualdad de oportunidades en la dimensión pública de la sociedad, mientras se mantenía una multiculturalidad en la dimensión privada, es decir, dentro de los hogares. Al contrario que lo que ocurría durante la etapa colonial, en la que se promovían los guetos o comunidades formadas mediante segregación racial, en los años 70, el estado implantó cuotas de población en las urbanizaciones para impedir la concentración racial en determinadas zonas (Hill y Lian, 2013).

Desde entonces, la prosperidad alcanzada por el joven país se muestra en datos, como que ha albergado los Juegos del Sudeste Asiático en cuatro ocasiones: 1973, 1983, 1993 y 2015. Aunque se suponía que tendría que haber albergado los juegos de 2007, hubo de declinar esta opción al tener que demoler su Estadio nacional. Es notable que, de las 11 naciones que componen el sudeste asiático, solamente 4, entre las que se halla Singapur, han participado en las 28 ediciones que se han celebrado desde su fundación en 1959 (Olympic Council of Asia, 2016b). Igualmente, tampoco ha fallado en ninguno de los Juegos Asiáticos desde la primera edición en 1951, aunque nunca ha sido nación anfitriona (Olympic Council of Asia, 2016a).

Por su situación estratégica, Singapur ha sabido aprovechar el potencial de la isla como centro de conexión. Para ello, el 1 de julio de 1981 completó la construcción del Aeropuerto Internacional Changi (Corfield, 2010), que se ha hecho con numerosos premios al mejor aeropuerto a lo largo de los años (Phang, 2003).

3.1.3. Sociedad

Es bien conocida la tendencia de los países llamados occidentales hacia el estado del bienestar. Es, de hecho, el modelo que se considera como deseado en la

mayor parte de los países desarrollados. A grandes rasgos, el estado de bienestar es un modelo sociopolítico que se caracteriza por (Martínez Díaz, 2013):

- La existencia de una igualdad de derechos entre los ciudadanos, al conseguir ciertos objetivos personales que lo llevan al bienestar.
- Tener un Estado que se encarga de mejorar activamente la sociedad: interviene en la política de empleo, en la distribución de los recursos y en la integración de las personas en la sociedad.
- La necesaria participación de los ciudadanos y la transparencia de las maquinarias del estado que llevan a cabo las intervenciones anteriores.

En oposición a la concepción que se puede extraer de este modelo, según el cual el ciudadano tiene derecho a que el estado vele por sus intereses y la responsabilidad de apoyar al ciudadano para que alcance el bienestar, en Singapur la conciencia es muy distinta. La ciudadanía no es tanto una cuestión de derechos, como de deberes y obligaciones. La sociedad solamente se puede mantener si cada individuo coopera y realiza las labores que le son conferidas. Tales tareas están inmersas en un contexto de comunidad, de modo que ésta avanza a través de la realización de las mismas. En consecuencia, se define a un ciudadano como “activo” si reconoce como propias estas tareas comunales (Hill y Lian, 2013).

La perspectiva del Estado frente a la diversidad étnica, denominada multiracialismo, es uno de los pilares de la sociedad singapurense. Chan y Evers (1972) definen este concepto, tal y como se aplica en Singapur, como la práctica de tolerancia cultural hacia las distintas comunidades, la aceptación de las diferencias existentes entre las distintas prácticas religiosas, costumbres y tradiciones de dichas comunidades y, por último, el reconocimiento de la igualdad de los ciudadanos ante la ley y la igualdad de oportunidades, sin importar la comunidad étnica del individuo.

Es interesante la forma en que se hace uso institucional de la diversidad étnica. En lugar de tratar de minimizar diferencias, los singapurenses son automáticamente etiquetados al nacer como miembros de un grupo (chinos, malayos, indios u otros, conocido como esquema CMIO), y como tales se espera que abracen las costumbres y la cultura de ese grupo. Institucionalmente, por otra parte, todas las culturas y sus manifestaciones (lengua, religión, festivales, etc.) reciben igual apoyo. Aun así, los malayos son considerados como el pueblo indígena de Singapur (aunque en realidad

la mayoría de la población malasia son descendientes de inmigrantes de la época colonial, no indígenas), y es ésta la razón de que el himno nacional de Singapur esté escrito en lengua malaya (Huat, 2003).

Las Figuras 4, 5 y 6 muestran la variación en términos absolutos y relativos de la población en cada una de las etnias que forman parte de la nación.

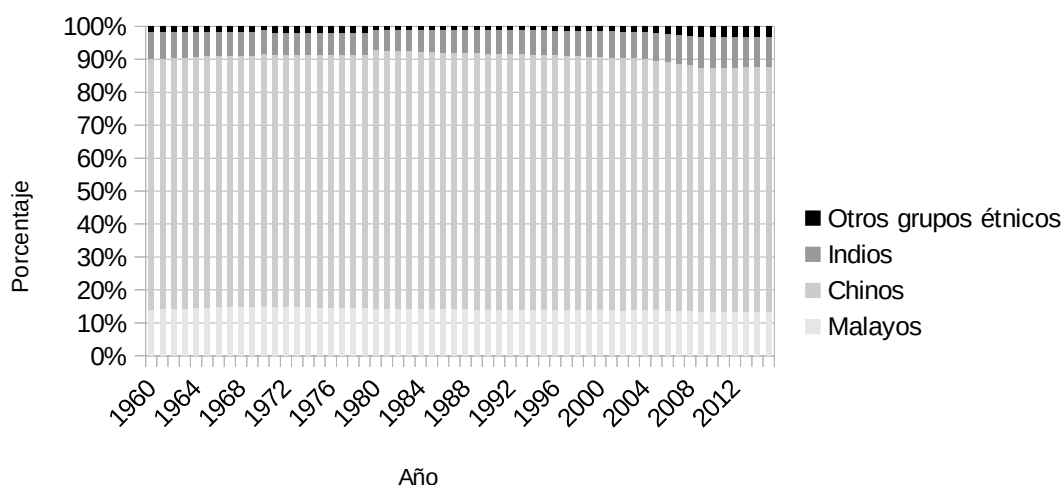


Figura 4: Variación del porcentaje de población por grupo étnico en Singapur entre 1960 y 2015.
Fuente: Gobierno de Singapur (2016)

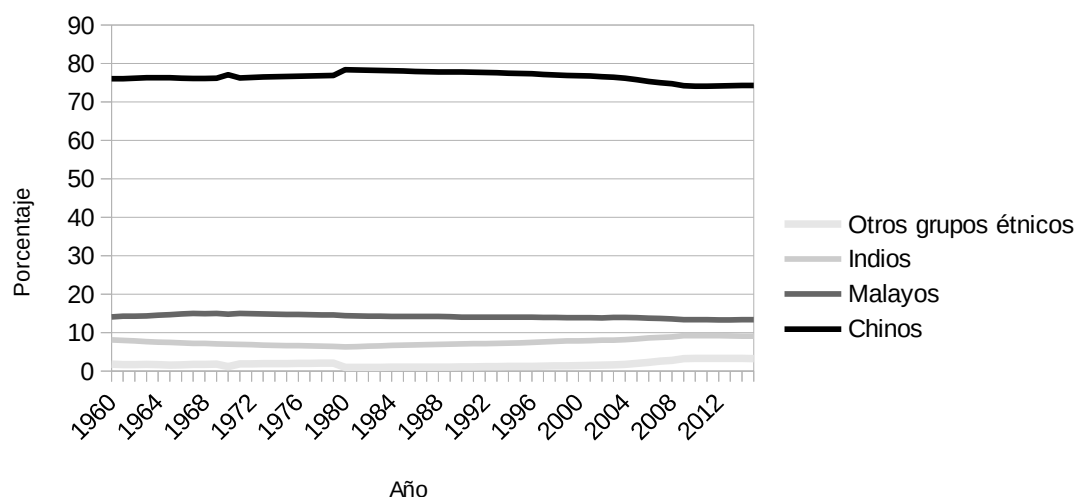


Figura 5: Porcentaje de población por grupo étnico entre 1960 y 2015.
Fuente: Gobierno de Singapur (2016)

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

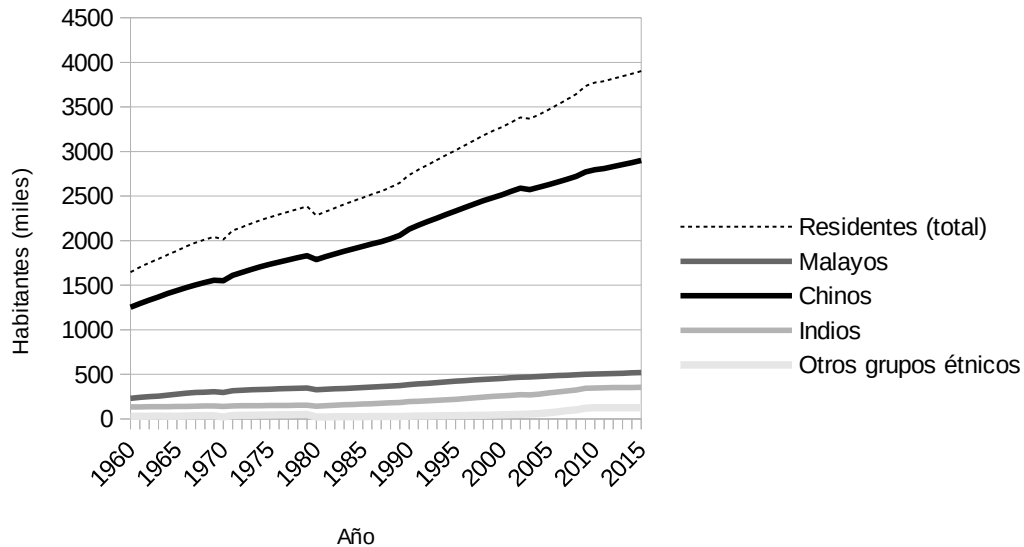


Figura 6: Población total y por grupo étnico entre 1960 y 2015.

Fuente: Gobierno de Singapur (2016)

Como se puede apreciar, aunque el aumento en la población de Singapur durante el último medio siglo ha sido sostenido, los porcentajes de cada una de las etnias que lo conforman se han mantenido relativamente estables.

Un problema que Singapur ha tenido que afrontar desde su independencia es el de la religión. En 1984 introdujo la asignatura obligatoria Religious Knowledge (*Conocimiento Religioso*) en Secundaria. En esta asignatura los alumnos podían elegir entre distintas opciones según su cultura de origen. En total, como recoge Chew (1993), se contaban seis alternativas: Bible Knowledge (*Conocimiento de la Biblia*), Islamic Religious Knowledge (*Conocimiento Religioso Islámico*), Buddhist Studies (*Estudios Budistas*), Hindu Studies (*Estudios Hindúes*), Sikh Studies (*Estudios Sikh*) y Confucian Ethics (*Ética Confuciana*). Religious Knowledge rompía en cierta forma el carácter laico del estado, y rápidamente la potencial división social que trae consigo la religión se puso de manifiesto, obligando cinco años más tarde a eliminar la asignatura de las aulas y la implantación de un programa de impartición de valores compartidos ausentes de sectarismo y religión (Hill y Lian, 2013).

3.1.4. Política

Singapur es una república parlamentaria. En su historia, un solo partido ha ostentado el poder absoluto en el parlamento mediante la obtención de todos o casi todos los escaños. De hecho, desde 1959 ha habido 13 elecciones parlamentarias: en 1959, 1963, 1968, 1972, 1976, 1980, 1984, 1988, 1991, 1997, 2001, 2006, 2011 y 2015 (Departamento de Elecciones de Singapur, s.f.). Rodan (1998) afirma que Singapur es, de facto, un estado de partido único. Este partido, dirigido durante tres décadas por Lee Kuan Yew, responde a las siglas de PAP (People's Action Party). Aunque el PAP precede en antigüedad a Lee Kuan Yew, a principios de la década de 1960 existían fuertes tensiones internas entre dos facciones del partido. La primera de ellas, a la que pertenecía Lee Kuan Yew, incluía a los nacionalistas de clase media educados en la corriente británica. La segunda se componía de políticos pertenecientes a la corriente china, encuadrados en un espectro político situado más a la izquierda que los anteriores.

Las tensiones entre los dos grupos culminaron en la ruptura del partido y la formación de un nuevo partido rival del PAP, el pro comunista Barisan Sosialis (Rodan, 1998). Esta escisión respondía a una diferencia de opiniones entre dos importantes grupos sociales del país, existente desde el fin de la II Guerra Mundial: por un lado encontramos a una clase media educada en la corriente inglesa, proclive a la unión con Malasia y al apoyo de la multiculturalidad, y por otro, a la clase trabajadora educada en la corriente china (conocidos como nanyang), que ensalzaba los valores de la cultura, filosofía y lengua chinas (Hill y Lian, 2013).

Sin embargo, cabe destacar (Bustelo Gómez, 1994) que el sistema por el que se reparten los escaños ha permitido que el PAP ocupara, en 1984, 79 escaños de 81 en total con menos del 65% de los votos, u 81 de 83 en 1997 con un 65% (ver Tabla 2).

De hecho, el sistema estipulado en la ley electoral de Singapur determina que todos los escaños correspondientes a cada circunscripción electoral son otorgados a los candidatos del partido que más votos ha obtenido. Esto significa que, si en todas las circunscripciones un hipotético partido "A" obtuviese un 51% de los votos y otro hipotético partido "B" el 49% restante, todos los escaños del parlamento serían

Tabla 2

Escaños y porcentaje de votos obtenidos por el PAP en las elecciones parlamentarias desde 1959 en Singapur.

Año	Escaños	Porcentaje de votos
1959	43 (de 47)	54,10%
1963	37 (de 51)	46,90%
1968	58 (de 58)	65,81%
1972	65 (de 65)	70,40%
1976	69 (de 69)	74,10%
1980	75 (de 75)	77,70%
1984	77 (de 79)	64,80%
1988	80 (de 81)	63,20%
1991	77 (de 81)	61,00%
1997	81 (de 83)	65,00%
2001	82 (de 84)	75,30%
2006	82 (de 84)	66,60%
2011	82 (de 84)	60,10%
2015	83 (de 89)	69,90%

Fuente: Departamento de Elecciones de Singapur (s.f.)

asignados a los candidatos del partido A, y el partido B, que ostentaría un 49% de los votos, quedaría sin representación parlamentaria. Este sistema recibe el nombre de Group Representation Constituencies o GRC (Reilly, 2007).

Una de las más importantes particularidades del sistema GRC es que, en cada grupo de candidatos, debe existir al menos uno perteneciente a una comunidad racial minoritaria (Kwon, 1998). A pesar de que el cambio legal que suponían los GRC trajo consigo una consolidación de la hegemonía del PAP en el mapa electoral de Singapur, hemos visto que existe una justificación para llevar este cambio a cabo. Ésta es que los candidatos pertenecientes a etnias minoritarias tienen una dificultad añadida para ser elegidos en los distritos de inmensas mayorías chinas. Ni siquiera los candidatos del PAP, a pesar de la gran popularidad de su partido, pueden ignorar este efecto, por lo que la obligación legal de incluir a los grupos étnicos minoritarios entre los candidatos al parlamento eliminaría la posibilidad de que, por motivos de estrategia electoral, el parlamento solamente contase con miembros pertenecientes a la comunidad china (que, como hemos visto, es la mayoritaria en el país).

- La política del gobierno ha sido siempre de corte autoritario, donde o bien no se tolera, o bien se castiga la oposición a sus directrices. Bustelo Gómez (1994), Fetzer (2008) y Rodan (1998) nos ofrecen una selección de hechos que ejemplifican esta afirmación: Se permite la detención sin juicio ni límite

temporal a acusados de subversión, por medio del Internal Security Act 1985.

- Existen presos políticos. En particular, un ex parlamentario del partido Barisan Sosialis estuvo encarcelado sin juicio entre 1966 y 1989.
- Se practica la censura. Entre 1987 y 1988 en Singapur no hubo acceso a ciertos medios de comunicación internacionales, debido a sus comentarios críticos para con el sistema político singapurense.
- Están prohibidas las organizaciones relacionadas con actividad política, excepto si están debidamente registradas para tal fin. En la realidad, el gobierno solamente fija su atención en aquellas organizaciones cuya actividad es considerada anti-PAP.
- En 1997, durante la campaña electoral, el primer ministro Goh Chok Tong advirtió a los votantes que la inversión para reparación y mejoras de las viviendas públicas, en las que vivían aproximadamente un 90% de los singapurenses (hoy en día, algo más del 80%), se concedería en base a un criterio de prioridad. Las viviendas situadas en zonas donde la oposición recibe más apoyo en las urnas serían relegadas a los últimos puestos.
- En 1988, el PAP introdujo en el sistema electoral los GRC, cambiando el mapa de divisiones electorales previo, con el objetivo de eliminar los distritos en los que el voto a la oposición había sido predominante en las elecciones de 1984.
- El servicio militar obligatorio tiene una duración de dos años (y mayor para aquellos individuos que muestren síntomas de obesidad).
- Las conductas “incivilizadas”, tales como arrojar desperdicios al suelo, fumar en lugares públicos o no tirar de la cadena en retretes públicos, son castigadas con fuertes multas.
- Los chicles están prohibidos (tanto su importación como producción y venta) por considerarse un elemento sucio.

A pesar de que el PAP ha tomado las medidas oportunas para mantener un régimen sin disputas, la popularidad de que goza (recordemos que en todas las elecciones parlamentarias desde 1968 ha obtenido más del 60% de los votos) no se debe enteramente a sus maniobras políticas. La genuina mejora en la calidad de vida de los habitantes de Singapur desde la década de los años 60 han contribuido fuertemente a crear una imagen muy positiva del PAP y de Lee Kuan Yew, quien fue su líder desde sus comienzos hasta 1991 (Kwon, 1998).

Un gobierno como el singapurense practica la censura, de modo que los contenidos televisivos están fuertemente dirigidos al entretenimiento familiar, a los deportes y al ocio (evitando deliberadamente contenidos “subversivos” como la política o el sexo). Pero más aún, Rodan (1998) afirma que se acepta ampliamente que la actividad en internet de los ciudadanos sea objeto de monitorización continua. Aunque esto no significa que esa monitorización se produzca realmente, el gobierno ha hecho alarde en ocasiones de su capacidad de llevarla a cabo si así lo desea.

3.1.5. Economía

En las décadas posteriores a la Segunda Guerra Mundial, varias naciones han destacado por su inaudito crecimiento económico. Japón y los denominados cuatro “Tigres Asiáticos”: Corea del Sur, Taiwan, Hong Kong y Singapur (Bustelo Gómez, 1990, 1994; Chia, 2011) han sido analizados profundamente por los economistas por el “milagro económico” que han demostrado, en la búsqueda de elementos comunes que puedan considerarse causantes de su éxito y que puedan ser extrapolados a otros países. Según Chia (2011), la filosofía confucionista que permea las instituciones de estos países puede ser (y así, afirma, es considerada por algunos estudiosos) la clave de este éxito.

Los años 60 y 70 se dedicaron a la expansión del sector de las manufacturas, de modo que el peso sobre el Producto Nacional Bruto (PNB) pasó a ser del 12% en 1960 al 28% en 1980. Sin embargo, otros países del sureste asiático también empezaban a ser competitivos en el mundo a través de industrias de baja cualificación, por lo que si Singapur quería mantenerse a la cabeza debía modificar su modelo económico. Por esta razón, en 1980 comenzó un plan de diez años en el que la inversión en alta tecnología y la promoción de la ciencia (a través por ejemplo de inversión en investigación y desarrollo) fueron el eje principal de la renovación económica del país. Comenzaba la llamada “Segunda Revolución Industrial” en Singapur (Goh y Gopinathan, 2006). Desde su independencia en 1965 y hasta 1989, su PNB per cápita creció un 7% cada año, lo que significa que se quintuplicó en esos 24 años⁹.

9 El PNB ha caído en desuso como medida de la producción de un país, pero se utilizó mucho en décadas pasadas (y es por esto que Bustelo Gómez, 1990 y 1994, hace uso del PNB como dato descriptivo). Samuelson y Nordhaus (2001) lo definen de forma superficial como producción total obtenida con trabajo o capital propiedad de los residentes de un país (no confundir con la producción obtenida dentro del país, que recibe el nombre, más frecuentemente utilizado, de Producto Interior Bruto o PIB).

Por su parte, el Producto Interior Bruto (PIB) singapurense aumentó considerablemente hasta 1985. En ese momento se produjo una fuerte recesión debida al desequilibrio entre el aumento salarial y el aumento de la productividad (Bustelo Gómez, 1990) de la que se recuperó en menos de dos años, volviendo en 1987 a un crecimiento por encima del 9%. Este crecimiento había caracterizado la marcha de la economía singapurense desde 1965, pues entre 1966 y 1979 la economía disfrutó de un aumento medio anual del PIB del 9,4%, mientras que en la primera mitad de la década de los ochenta este aumento medio anual fue del 8,5% (Bustelo Gómez, 1994). Este considerable éxito económico se vio reflejado en los datos de empleo: a mediados de los años 70, Singapur había alcanzado el pleno empleo (Goh y Gopinathan, 2006).

En los últimos años, el milagro económico ha seguido manteniéndose. En los años entre 2008 y 2014 la tasa de empleo se ha mantenido entre el 2% y el 3,2% para el total de la población y entre el 2,8% y el 4,5% entre los residentes (según datos del Ministerio de Comercio e Industria). Los datos del Anuario de 2015 ofrecidos por el Departamento de Estadística nos muestran cómo la renta per cápita y el producto interior bruto crecieron entre 2010 y 2014 de forma irregular pero siempre positiva.

De hecho, la lista del Banco Mundial con la estimación del producto interior bruto per cápita para el año 2014 (Banco Mundial, 2016b) ofrece muchos datos sobre el poder de la economía singapurense actualmente, tanto en un contexto local (Asia oriental) como en un contexto global (Tabla 3).

Tabla 3
Variación del Producto Interior Bruto y de la renta per cápita en porcentaje entre los años 2010 y 2015 en Singapur.

Año	Producto Interior Bruto (variación en % respecto del año precedente)	Renta per capita (variación en % respecto del año precedente)
2010	15,24	13,216
2011	6,207	4,016
2012	3,67	1,158
2013	4,675	2,994
2014	3,26	1,928
2015	2,008	0,805

Fuente: Banco Mundial (s.f.)

Tal y como puede observarse, Singapur parece haber dejado atrás el milagro económico, pero su economía ha seguido creciendo aun en los años más duros de la crisis global sufrida por la economía mundial.

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

En la lista de 2015 del Banco Mundial (2016b) que ordena a los países por su PIB per cápita, elaborada con el método Atlas¹⁰, Singapur se encuentra en el puesto 17 de 213, inmediatamente por debajo de Irlanda y por encima de Holanda, Canadá, Austria, Alemania o Reino Unido. De hecho, se encuentra muy por encima de España, que alcanza el puesto 44, con un PIB per cápita que apenas supera la mitad del de Singapur (28.530US\$).

Con 52.090US\$, Singapur es un país clasificado como con alto PIB per cápita (al superar el límite de los 41.925US\$, marcado por el Banco Mundial para recibir esa consideración). Esta cifra se encuentra muy por encima de la media de su región, Asia oriental y Pacífico, que se sitúa en 9.788US\$, y también por encima de la zona compuesta por Europa y Asia central (con 24.206US\$).

Cuando se toma en consideración el método PPP¹¹ (Purchasing Power Parity o Paridad de Poder Adquisitivo), los resultados son aún más llamativos. Singapur está a la cabeza de la lista, en el puesto 7, con 81.360Intl.\$. Eso lo sitúa por encima de todos los países de Europa (siendo el más cercano Luxemburgo, en el puesto 9) y de los Estados Unidos (en el puesto 17, con 57.540Intl.\$). Encontramos a España en el puesto 50, con 34.510Intl.\$.

En cuanto a la actividad económica en Singapur, históricamente, ha sido el sector terciario (servicios) el prominente en la economía de la nación. Debido a las casi inexistentes materias primas disponibles en el territorio, Singapur decidió rápidamente explotar su situación geográfica. Hoy en día, el sector primario (agricultura y minería) supone un 1.2% de los empleos en Singapur, frente a un 18.8% del sector secundario (industria y manufacturas). El 80% restante es para empleados del sector servicios (datos de 2010 según Swee-Hock, 2012)

Todo este desarrollo económico que ha puesto a Singapur en el punto de mira de expertos economistas de todo el mundo, ha tenido otro factor en el que reflejarse:

10 El método Atlas es una forma de calcular el PIB per cápita utilizada por el Banco Mundial. Atenúa los efectos causados por las fluctuaciones en los tipos de cambio. Su unidad de medida es el dólar estadounidense.

11 El método PPP es el segundo método empleado por el Banco Mundial para calcular el PIB per cápita. Este método elimina las diferencias en los precios de los productos entre las economías. Su unidad de medida es el dólar internacional (Intl.\$), que tiene el mismo poder adquisitivo que un dólar estadounidense en los Estados Unidos. Este segundo método proporciona una visión más apropiada para comparar la riqueza de distintos países.

el índice de desarrollo humano (IDH). Este valor, lanzado por la Organización de las Naciones Unidas (ONU) en 1990 (Neumayer, 2001) pretende ser un indicador del desarrollo de un país desde el punto de vista de sus habitantes, atendiendo a tres factores: la renta per cápita, la esperanza de vida y el nivel de alfabetización. Cada uno de estos factores, en cada país, da lugar a un índice con valor entre 0 y 1.

En la Figura 7 se puede observar la variación del IDH en Singapur entre 1990 y 2014, y en la Figura 8 la evolución en esos mismos años de la posición de Singapur en el mundo atendiendo al valor de su IDH.

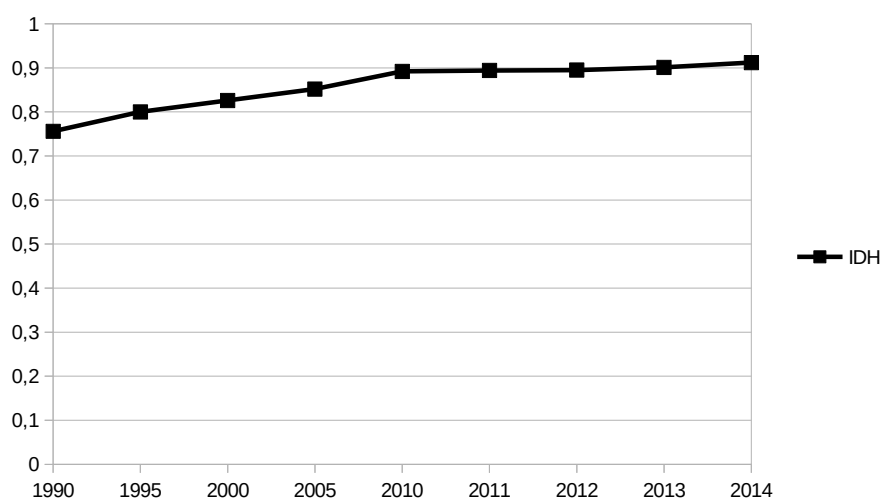


Figura 7: Variación del IDH entre 1990 y 2014 en Singapur.

Fuente: Elaboración propia, a partir de Jahan (2015); Malik (2013, 2014).

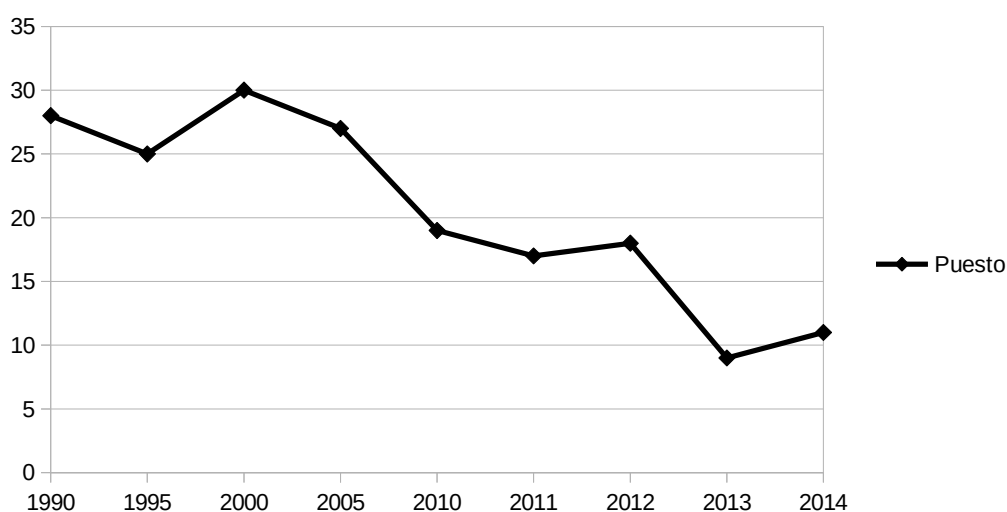


Figura 8: Puesto en la tabla clasificatoria mundial de IDH de Singapur entre 1990 y 2014.

Fuente: Elaboración propia a partir de Jahan (2015); Malik (2013, 2014).

Como se aprecia en las Figuras 7 y 8, el IDH de Singapur ha aumentado progresivamente desde 1990, de forma más rápida que en el resto de países. Esto ha propiciado que se su posición en la tabla de países ordenados por IDH haya mejorado notablemente desde entonces.

De cara al futuro, es una preocupación para el gobierno el hecho de que, aunque el crecimiento ha rondado el 8% desde la independencia de Singapur hasta la primera década del siglo XXI, es una tendencia natural de las economías que alcanzan la madurez una reducción de ese crecimiento. Esto, unido al reto que supone la inversión de la pirámide poblacional hacia 2030, implica tomar medidas para mantener la fuerza económica del país. El Ministerio de Comercio e Industria de Singapur (2011) sugiere, entre otras, tratar de evitar la fuga de mano de obra al exterior y equilibrar cuidadosamente la entrada de mano de obra extranjera.

La fotografía que acabamos de mostrar nos ayudará a percibir mejor la forma en que el sistema educativo de Singapur ha evolucionado desde su periodo colonial hasta la actualidad y a contextualizar geográfica, política y socialmente el país objeto de estudio.

3.2. Sistema educativo de Singapur

El sistema educativo, sus cambios y las circunstancias que los motivan conforman el currículo de cada una de las asignaturas que se imparten en los centros escolares, y éste deja su impronta de un modo inconfundible en los libros de texto que se utilizan. Por esta razón, en este capítulo haremos un recorrido por la evolución del sistema educativo de Singapur desde principios del siglo XIX hasta la actualidad, con el objetivo de entender mejor el contexto pedagógico de este país, el cual supone un aspecto fundamental para nuestra reflexión sobre su repercusión en los resultados que alcanza en las evaluaciones que periódicamente se hacen a nivel internacional.

3.2.1. Los comienzos. Siglo XIX – primera mitad del siglo XX

Como ya hemos visto, en 1819 la Compañía Británica de las Indias Orientales estableció un puesto de comercio en Singapur (Chia, 2011; Tan et al., 2008). La

inmigración traída por la prosperidad surgida en los años siguientes atrajo a una importante inmigración formada por chinos, malayos e indios. Estos tres grupos sociales convivían en la isla, comerciaban e interactuaban hasta cierto punto, pero socialmente estaban separados y poseían sus rasgos culturales, costumbres y lengua propios. No es de extrañar que las tres comunidades fundaran pronto sus escuelas (llevadas según los usos de los países de origen y dirigidas a sus propios jóvenes) sin apenas intervención alguna por parte del gobierno colonial británico, el cual no consideraba que la educación fuese una prioridad. De hecho, solamente la corriente malaya tuvo apoyo económico del gobierno británico, debido a que se consideraba que ayudaba a que la juventud cultivase su lado más cívico, lo cual contribuía a la estabilidad social de la colonia (Chia, 2011). Esta preocupación por la juventud malaya no era necesaria con los jóvenes chinos o indios, pues se consideraba que eran trabajadores transitorios, y no habitantes permanentes como los malayos.

Hasta 1867, en que se convirtió en Colonia Británica, como parte de las Colonias del Estrecho, la Corona no se decidió a intervenir, paulatinamente, en la situación educativa del lugar, disconexa y desorganizada. Se comenzaron a establecer escuelas según el sistema británico (hasta entonces, solamente existían escuelas dirigidas por misioneros), y en las ya existentes se trató de promover activamente el uso del inglés como lengua curricular, pues era el lenguaje del gobierno colonial. El aprendizaje del inglés se hizo atractivo a través de una remuneración considerablemente más elevada para los trabajadores conocedores de la lengua, y de un sistema de becas a las escuelas a cambio de enseñar inglés a los alumnos hablantes de otras lenguas.

Las escuelas de la corriente británica aplicaban un sistema educativo de 11 años de duración dividido en tres ciclos (Tan et al., 2008):

- Primaria, compuesto de los cursos Primary I, Primary II y Standard I.
- Escuela elemental, cuyos cursos comprendían Standard II, Standard III, Standard IV y Standard V.
- Escuela secundaria, en la que se cursaban Standard VI, Standard VII, Standard VIII y Standard IX.

Sin embargo, no era la corriente predominante. De hecho, en los años 30 del siglo XX había aproximadamente 27.000 alumnos en las escuelas de la corriente inglesa, 38.000 en las de corriente china, 5.800 en las malayas y unos 1.000 alumnos en la corriente tamil (Alatas, Sandhu y Wheatley, 1989).

Al comienzo de la Segunda Guerra Mundial, la mayor parte de las escuelas fueron destruidas, saqueadas o cerradas debido a la entrada en la isla del ejército japonés, el cual traía consigo la intención de ocupar Singapur. Sin embargo, esta invasión japonesa no introdujo severos cambios en las bases del sistema educativo. Japón quiso reanudar la educación en Singapur con inmediatez, por lo que el sistema de diferentes corrientes (excepto la inglesa) continuó existiendo. Básicamente, se prohibió la enseñanza del inglés como asignatura. Solamente se podía utilizar este idioma en el caso de alumnos que no entendieran la lengua de instrucción. En la práctica, el inglés se utilizó en mayor o menor medida como lengua vehicular, e incluso se practicó su enseñanza de forma ilegal (Tan et al., 2008).

3.2.2. El fin de la guerra. La independencia

Tras el fin de la Segunda Guerra Mundial y el retorno de los británicos a la isla, se introdujo por parte del gobierno británico en Singapur su “Ten Year Plan” para la educación, que comenzó a ser por vez primera una prioridad en la colonia. Tres eran las bases principales del Plan (Chia, 2011):

1. La educación debía fomentar y extender la capacidad de autogobierno y los ideales de lealtad cívica y responsabilidad.
2. Se debía proporcionar a los niños de ambos sexos y de todas las razas las mismas oportunidades educativas.
3. Sobre la base de una Educación Primaria gratuita se debían desarrollar una Educación Secundaria, una formación profesional y una educación superior, de acuerdo a las necesidades del país.

En 1955 el Partido Laborista, vencedor en las primeras elecciones generales a la Asamblea Legislativa, declaró que su política educativa incluía como prioridad la escolarización gratuita y obligatoria para todos los niños, ya fuera en inglés o en cualquiera de las otras lenguas, durante seis años. Se diseñaría un programa de becas para los siguientes años de escolarización. Se constituyó un comité, conocido como All Party Committee, para elaborar un informe sobre la situación de las escuelas de la corriente china (en contra de la opinión de Lee Kuan Yew, el secretario general del partido del gobierno, que opinaba que todas las corrientes debían ser estudiadas). Este informe, aparte de reconocer que la sugerencia de Lee Kuan Yew debería haber sido seguida, recomendaba la educación bilingüe (en Educación Primaria) y trilingüe

(en Educación Secundaria), siendo el origen de la educación bilingüe que se imparte hoy en día. Y más importante todavía, reconocía la necesidad de que la educación en Singapur tuviese como objetivo el desarrollo en los alumnos de una lealtad común a la nación (Singapur, como parte de Malasia, que estaba a punto de lograr su independencia). Este no era un objetivo sin fundamento, pues los casi cien años de existencia de Singapur como colonia británica habían provocado a mediados del siglo XX que sus habitantes no tuviesen un sentimiento nacional, sino que se definían a sí mismos como chinos, malayos o indios (Goh y Gopinathan, 2006). La manera de enfrentarse a la tarea de construir un nuevo país fue pensar en el futuro y dejar que la educación jugase un papel clave en ese proceso (Chia, 2011).

A partir de la independencia de Singapur, la educación se ha desarrollado en tres fases (Ministerio de Educación de Singapur, 2010):

- Entre 1959 y 1978, el objetivo fue la supervivencia de la nación, dependiente de la educación de las nuevas generaciones.
- Entre 1979 y 1996, el objetivo fue la eficiencia.
- Entre 1997 y la actualidad, el objetivo es el desarrollo de las capacidades de los alumnos.

En todas las fases, la filosofía subyacente siempre fue la integración de las políticas educativas con las económicas y con la planificación de la mano de obra requerida en cada momento. Por ello, los currículos siempre han sido revisados con frecuencia (especialmente en la última fase), tanto como fuera necesario, en función de los cambios y previsiones del contexto socioeconómico del momento.

3.2.3. Primera etapa: educación para la supervivencia

Una etapa fundamental en el desarrollo educativo de Singapur fueron los años siguientes a 1959, año en que Singapur logró su autogobierno. A pesar de ello, la defensa, los asuntos exteriores y la seguridad interna siguieron siendo controlados por el gobierno británico (Chia, 2011). Entre 1961 y 1965 se desarrolló un plan de cinco años cuyo objetivo era mejorar drásticamente el nivel educativo de la población. La atención se centró en un principio en construir frenéticamente escuelas y contratar maestros para ellas, pues el objetivo inmediato era llevar formación a todos los niños de Singapur en edad escolar (Ministerio de Educación de Singapur, 2007).

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

Desde el principio, el gobierno de Singapur fue consciente de que la base de la prosperidad de una nación recaía en la educación de sus habitantes. Por tanto, era fundamental proporcionar una Educación Primaria universal y gratuita que integrase las cuatro corrientes educativas existentes (malaya, china, tamil e inglesa) y que pusiese un importante énfasis en las asignaturas técnicas, especialmente Ciencias y Matemáticas. Asimismo, y debido a que se consideraba que la población indígena de Singapur era de etnia malaya, se estableció el malayo como lengua oficial del estado (Goh y Gopinathan, 2006). Chia (2011) pone énfasis en la forma en que se entendía en Asia oriental la educación para la ciudadanía, no solamente como el desarrollo de los valores democráticos y cívicos (como se vive mayoritariamente en la actualidad en Occidente) sino más bien como el cultivo de la identidad nacional y de los valores morales y comunitarios. Esta cultura, en una nueva nación formada por cuatro comunidades muy diferenciadas, fue crucial en el exitoso devenir de Singapur en las décadas siguientes.

El impacto económico que sufrió Singapur a partir de su separación de Malasia en 1965 hizo reaccionar al gobierno, que comenzó a ver la educación como una institución necesaria en la mejora de la situación económica. Otros frentes abiertos fueron la socialización y la creación de un sentimiento nacional y una identidad singaporense (Goh y Gopinathan, 2006). De hecho, todos los días las escuelas de Educación Primaria comienzan con el izado de bandera y la entonación del himno nacional (Postiglione y Tan, 2007). Este ritual proviene de los años posteriores a la independencia total de Singapur, en los que todavía existían tropas británicas permanentes en la nación. Éstas se retiraron en 1971, una vez formado un regimiento de infantería para la defensa de Singapur (Ministerio de Educación de Singapur, 2007).

En 1960 el sistema educativo abrazó el bilingüismo, en el afán de aunar ambos ideales: la mejora económica y la creación de una identidad nacional. Lee Kuan Yew estaba convencido de que, si Singapur pretendía abrirse al exterior, la lengua inglesa, de facto lengua franca internacional, debía ser cursada en todas las corrientes como herramienta para permitir una apertura al exterior que ofreciera nuevas oportunidades de comercio con el resto de países (Sanderson, 2002). Por otra parte, las lenguas maternas (ya sean el chino, el tamil o el malayo) no debían abandonarse, porque podría traer una pérdida de cultura en las nuevas generaciones (Goh y Gopinathan, 2006). En la actualidad, la asignación de la lengua materna de un niño no es en absoluto arbitraria. Debido a que cada persona, como hemos visto en el capítulo

anterior, se encuadra en un grupo definido dentro del esquema CMIO (siendo éste el grupo de los padres o solamente del padre en el caso de parejas mixtas), su lengua materna es la de ese grupo. En el caso de padres que pertenecen a grupos distintos, éstos pueden elegir la lengua materna que estudiará su hijo junto con el inglés en el colegio (Huat, 2003). En 1968, todas las escuelas de Educación Primaria impartían tanto Matemáticas como Ciencias en inglés.

Como un nuevo añadido, para crear identidad y minimizar las diferencias entre las corrientes educativas, también en 1960 se introdujo el Primary School Leaving Examination o PSLE, que era (y es, puesto que hoy en día sigue existiendo) una forma de estandarizar los resultados y de otorgar a los alumnos que lo aprobaban un certificado de estudios oficial (Tan et al., 2008).

Poco a poco, las distintas corrientes fueron perdiendo fuerza. En 20 años el panorama cambió radicalmente. El porcentaje de alumnos de 1.º curso de Educación Primaria en las corrientes inglesa y china pasó, de un 47% y un 46% respectivamente en 1959, a un 91% y 9% respectivamente en 1979 (Ministerio de Educación de Singapur, 2007). No obstante, este cambio no fue puramente dirigido desde las instituciones, sino que fueron los propios padres los que, con una visión pragmática y de apertura al exterior, prefirieron que sus hijos aprendiesen una lengua con la que poder comunicarse universalmente (Gopinathan, 2006). Los alumnos matriculados en escuelas de corrientes malaya y tamil cayeron hasta números marginales, cerrándose todas las escuelas de ambas corrientes en los primeros años de la década de los 80 (Chia, 2011).

La gratuidad de la enseñanza primaria, por su parte, incrementó fuertemente la población estudiantil, lo que requirió una importante construcción de colegios (83 nuevos colegios entre 1959 y 1965). Y aun así, fue necesario seguir con el doble turno con el que comenzaron a funcionar los colegios en 1957. De hecho, tal fue la acogida del pueblo singapurense por la educación que ésta se convirtió virtualmente en universal en la etapa de Educación Primaria (a mediados de los años 60) antes de que el gobierno la declarara obligatoria. Y esta tendencia se repitió en 1970 sobre los primeros años de Educación Secundaria, aunque el crecimiento del número de alumnos en esta etapa siempre fue mucho más lento que en el caso de Educación Primaria (Gopinathan, 2006).

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

Pero la educación gratuita no era suficiente si existían alumnos con necesidades económicas pertenecientes a familias de bajo poder adquisitivo. Para ellos, el gobierno introdujo una serie de ayudas que lograron que prácticamente ningún niño careciese de los libros de texto que necesitaba. Además, estableció la Education Publishing Bureau (EPB) en 1967, cuya misión era la de desarrollar los libros de texto de las lenguas maternas y asegurarse de que todos los grupos raciales los podían adquirir al mismo precio, que debía ser lo más ajustado posible. Ese mismo año se puso también en marcha el Curriculum Development Committee. Este nuevo órgano tenía por objetivo identificar las necesidades de los currículos de las diferentes asignaturas y coordinar los esfuerzos para implementar los cambios necesarios para subsanar dichas necesidades. Entre otros cambios, este comité trató de aliviar el exceso de asignaturas mezclando varias de ellas en una sola. Con este espíritu nació el Primary Pilot Project, que en Educación Primaria juntaba en una sola las asignaturas de Matemáticas, Ciencias e Inglés, con la intención de utilizar las dos primeras como vehículo para enseñar la tercera. Desgraciadamente, la falta de preparación del profesorado impidió la completa implantación del proyecto, que fue abandonado junto con otro similar que integraba Historia, Geografía y Civismo (Hoong, 2008).

Por esta y otras razones, el gobierno tuvo que hacer frente a una inmensa necesidad de profesores con formación adecuada. Por esta razón se introdujeron programas en los cuales los profesores en formación impartían clase por la tarde y recibían formación por la mañana o viceversa, según el turno en que se encontraran (Gopinathan, 2006).

Es interesante notar que, desde la gratuidad de la enseñanza, la mayoría de los colegios de Singapur son públicos o se sostienen con fondos estatales. Durante las décadas siguientes a 1960 y hasta la actualidad, la presencia de escuelas privadas es marginal (Goh y Gopinathan, 2006).

Otro punto en el que se centró esta primera fase de supervivencia, y en el que se incidió de forma continua hasta finales de los años 70, fue el fortalecimiento y remodelación de la formación dirigida a los alumnos que no aprobaron los exámenes de Educación Primaria que les permitirían ingresar en una escuela de Secundaria. Esta formación técnica o profesional debía contribuir a suplir las necesidades laborales de las nuevas industrias, aunque fue necesario abrirla también a trabajadores ya en activo que pudieran convertirse en trabajadores cualificados (Gopinathan, 2006).

Todo este plan intensivo de dos décadas de duración para dar forma al sistema educativo de Singapur como nación independiente, a pesar de sus notables éxitos, no estuvo exento de problemas.

3.2.4. Segunda etapa: Mejora de la eficiencia

Hacia el final de la etapa anterior, algunos de los problemas emergentes se habían hecho muy evidentes (Goh y Gopinathan, 2006):

- La educación no discriminaba entre alumnos con diferentes capacidades, es decir, los requerimientos para todos los alumnos eran los mismos. Los alumnos más capacitados se aburrían, los menos capacitados tenían muchas dificultades para seguir el ritmo de la clase.
- Las plazas en Educación Secundaria fueron sobredimensionadas, de modo que el decreciente número de alumnos que terminaban la etapa de Educación Primaria no era suficientemente grande como para que ésta funcionase eficientemente.
- En su afán por crear rápidamente un sistema educativo en una etapa de crisis económica, el gobierno dejó de lado la comunicación tanto con profesores como con los padres de los alumnos, que es a quienes todas las medidas iban dirigidas.
- Los profesores no gozaban de un estatus suficientemente alto, y su moral estaba muy baja. De hecho, las tasas de dimisión entre profesores y directores, cercanas al 2%, se mantuvieron durante la primera mitad de la década de los 70.

Era necesaria una profunda revisión del sistema educativo, que comenzó con un giro en la perspectiva del gobierno, que se volvió más tecnocrática en este sector. Y debido a ello, se formó un comité dirigido por el Dr. Goh Keng Swee (delegado entonces del primer ministro), que se encargó de analizar el sistema educativo. El resultado de este trabajo se conoce como el Informe Goh, el cual puso de manifiesto las debilidades del sistema (Gopinathan, 2006):

- Los gastos en educación y los niveles de alfabetización no eran parejos, la inversión no estaba teniendo el efecto esperado en los alumnos.

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

- Un 20% de los alumnos abandonaban la Educación Primaria sin haber adquirido habilidades ni cualificaciones específicas que pudieran ser útiles en el mundo laboral.
- El nivel educativo en los años 70 era relativamente bajo, a pesar del aumento que se produjo en esa década de la alfabetización de la población.

Entre sus recomendaciones, el informe Goh incluía que el alto índice de suspensos en el PSLE podía reducirse repartiendo a los alumnos en diferentes cursos de acuerdo con sus capacidades (Chang, 1990).

La puesta en marcha de la “Segunda Revolución Industrial” obligaba además a una inversión en educación, que permitiese a la población adquirir las habilidades que el nuevo marco industrial requería. Ahora que la Educación Primaria y parte de la etapa de Educación Secundaria eran universales (gracias a los esfuerzos de las anteriores dos décadas), era el momento de mejorar la calidad de la educación (Goh y Gopinathan, 2006).

Para dar respuesta a los problemas anteriormente mencionados, el 1 de enero de 1979 entró en vigor el New Education System (NES), heredero de las recomendaciones que figuraban en el informe Goh, que se distinguía por la inclusión de tres vías (*streams*), tanto en Educación Primaria como en Educación Secundaria, entre las que los alumnos eran distribuidos en función de sus capacidades. Según el informe Goh, la separación de los alumnos en vías proporcionaría la oportunidad a los estudiantes menos capacitados de desarrollarse a un ritmo más pausado (Kaur, 2003). La idea era que cada alumno progresase hasta el límite de sus posibilidades en el colegio, lo cual le disponía en la mejor situación posible de cara a aprendizajes futuros que le permitiesen desarrollar una profesión. Además, estas tres vías permitían a los profesores centrarse en su labor (Gopinathan, 2006).

Es en estos primeros años del NES cuando un organismo dependiente del Ministerio de Educación, el Curriculum Development Institute of Singapore (CDIS) compuso equipos de trabajo para elaborar los libros de texto y otros materiales para Educación Primaria. El equipo encargado del área de matemáticas, dirigido por el doctor Kho Tek Hong, desarrolló un novedoso método gráfico para enseñar a los alumnos a resolver los problemas de enunciado (Hong, Mei y Lianghuo, 2014). Este método, que recibe el nombre de “Bar Model Method”, fue introducido en las aulas de

Educación Primaria en 1983 (Cheong, 2002), y desde entonces se ha convertido en una seña de identidad del sistema educativo de Singapur.

Hasta 3.º curso de Educación Primaria todos los alumnos seguían la misma educación. Al final de tercero, los alumnos eran examinados en Inglés, Matemáticas y Lengua Materna (Tan et al., 2008). Sus resultados definían su ubicación a partir de cuarto curso, pues eran redirigidos a uno de los tres siguientes programas (Hong, 1980):

- Normal bilingual course (“N” course). Duración: 3 años. Se gradúan en 6.º curso de Educación Primaria.
- Extended bilingual course (“E” course). Duración: 5 años. Se gradúan en 8.º curso de Educación Primaria.
- Monolingual course (“M” course). Duración: 5 años. Se gradúan en 8.º curso de Educación Primaria.

También existían diferentes itinerarios para los alumnos de Secundaria. Una vez aprobado el PSLE, existían tres diferentes programas (Chang, 1990):

- Special Course. Duración: 4 años. Ofrece la opción de cursar dos First Languages, que normalmente son inglés y chino. A esta vía puede acceder el 10% de alumnos con mejores notas en el PSLE.
- Express Course. Duración: 4 años. Aproximadamente el 60% de los alumnos puede acceder a este itinerario.
- Normal Course. Duración: 4 años. Curso previsto para el 30% restante.

Aunque todos los itinerarios tienen la misma duración, los dos primeros permitían al alumno presentarse al examen de nivel ‘O’, mientras que los alumnos del Normal Course accedían al nivel ‘N’ y una vez aprobado podían cursar un quinto curso que les diese acceso al examen de nivel ‘O’ (Chang, 1990).

En los dos primeros, los contenidos de matemáticas eran exactamente los mismos y se impartían en inglés, si bien en el curso “E” la impartición de los mismos se extendía en dos años más que en el curso “N”. Esto significa que los contenidos son los mismos, pero el ritmo es más pausado y los alumnos se graduaban en 8.º

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

curso, en lugar de en 6.º curso. Por su parte, en el curso “M” los contenidos eran más básicos y la lengua en que se impartía puede ser inglés o chino (ver Figura 9).

Sin embargo, el sistema permitía cierta flexibilidad para alumnos que desarrollaban sus aptitudes académicas con cierto retraso, los cuales podían cambiar de una vía a otra si demostraban estar capacitados (Tan et al., 2008).

Al final de la etapa, los cursos “N” y “E” habían de aprobar el PSLE, mientras que los alumnos del curso “M” se presentaban a un examen diferente, el Primary School Proficiency Examination o PSPE (Tan et al., 2008).

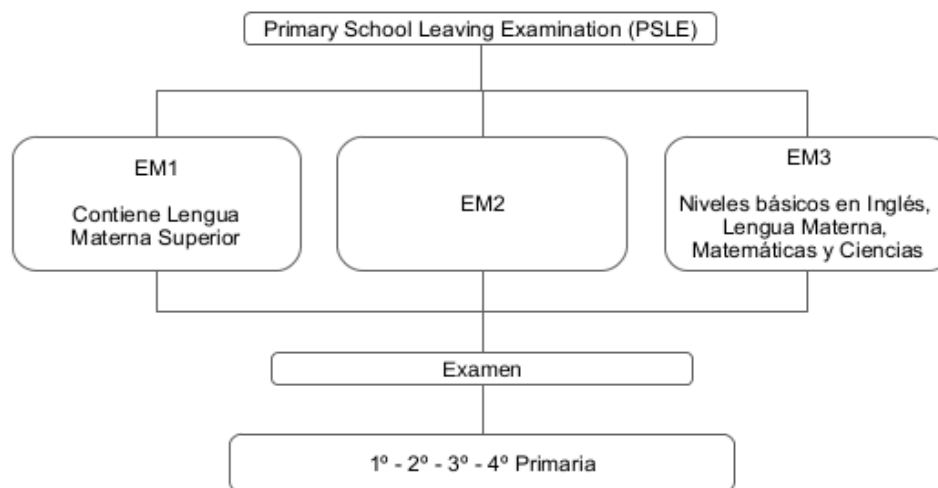


Figura 9: Las tres vías originales del New Education System en Educación Primaria. Fuente: Tan et al., 2008.

Fuente: Elaboración propia a partir de Tan et al., 2008.

El PSLE del New Education System constaba de aproximadamente un 20% de preguntas de múltiple respuesta y de un 80% de resolución de problemas. Además, hasta el 80% de la puntuación de cada problema se otorgaba por la correcta explicación del método empleado en su resolución (Ban Har, 2007). Esto pone de manifiesto la importancia que tenía la capacidad comunicativa de los alumnos en inglés, que recordemos no era la lengua materna de muchos de ellos. Como afirma Wang-Iverson (Wang-Iverson, Myers y Edmund Lim, 2009), cuando se desarrolló el currículo de Matemáticas al principio de los años 80, un 77% de los estudiantes de Singapur no tenían el inglés como lengua materna. En la edición de PIRLS de 2006, solamente un 21% de los alumnos que se sometieron a la muestra afirmaron hablar inglés en casa (Mullis et al., 2007).

No en vano, la necesidad de reforzar las capacidades de los alumnos en inglés, la lengua de instrucción de un importante porcentaje del currículo escolar desde 1.º curso de Educación Primaria, hizo al Ministerio de Educación en 1990 tomar la decisión de organizar un programa de atención temprana para identificar a aquellos alumnos que accedían al primer curso de Educación Primaria con un nivel insuficiente de inglés o de alfabetización, y ayudarles a mejorarlo para enfrentarse con garantías de éxito al curso. Este programa, que recibe el nombre de Learning Support Programme (LSP), comienza al principio de 1.º curso de Educación Primaria con una batería de pruebas que identifique a los alumnos clave por su escaso conocimiento del inglés (según Vaish y Tan, 2008, aproximadamente un 20% de los alumnos de 1.º curso de Educación Primaria). A estos alumnos se les añade media hora diaria de apoyo con profesores especializados y en grupos de 8 a 10 alumnos. En caso de necesitarlo, este apoyo continúa en 2.º curso (Ministerio de Educación de Singapur, 2015).

El sistema inicial de vías en Educación Primaria cambió en 1992. A partir de entonces, las vías pasaban a formarse al término de 4.º curso, en lugar de 3.º curso, y las nuevas alternativas, todas bilingües, recibieron los nombres EM1, EM2 y EM3 (ver Figura 10). Las dos primeras presuponían un nivel suficientemente alto de inglés, y los alumnos eran segregados por nivel en lengua materna (a un nivel de primera lengua, como el inglés, en EM1, como segunda lengua en EM2, y con un nivel oral básico en EM3). La tercera opción, a la que asistía aproximadamente un 15% de los alumnos, venía a sustituir el curso “M” anterior (Barr y Skrbiš, 2008) y se centraba en conocimientos básicos de las distintas asignaturas. El ser bilingües los tres niveles, el examen PSPE al que se presentaban los alumnos del curso “M” desapareció. Aunque todos los alumnos se examinaban de Inglés y Matemáticas al mismo nivel, el examen de Lengua Materna era diferente según el curso y además los alumnos del EM3 no se examinaban de Ciencias (Tan et al., 2008). Cabe destacar que, a diferencia del sistema anterior, las tres vías EM1, EM2 y EM3 tenían la misma duración, 2 años, y por tanto los alumnos se graduaban siempre en 6.º curso de Educación Primaria.

Los resultados no se hicieron esperar. Antes de la llegada del NES, menos del 40% de los alumnos aprobaban los dos exámenes de lenguas (Inglés y Lengua Materna) en las pruebas, tanto de fin de Educación Primaria como de Secundaria. En 1984, los porcentajes de aprobados alcanzaron el 85,5% (en Inglés) y el 98,7% (en Lengua Materna) en los exámenes de fin de Educación Primaria, y superaron el 90% en Inglés en los de Secundaria. Además, el número de alumnos que comenzaban Educación Primaria pero no llegaban a Secundaria (aspecto que señalaba el informe

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

Goh) disminuyó bruscamente. En 1986, menos del 1% de los alumnos dejaba la escuela con menos de 10 años de formación. En 1995 y 1999, los resultados en las pruebas internacionales TIMSS eran además excepcionales (Goh y Gopinathan, 2006). El refuerzo del sistema bilingüe repercutió rápidamente en la población singapurense. Según Kennedy, Mullis, Martin y Trong (2007), el porcentaje de residentes con alfabetización en dos o más idiomas se incrementó del 45% en el año 1990 al 56% diez años más tarde.

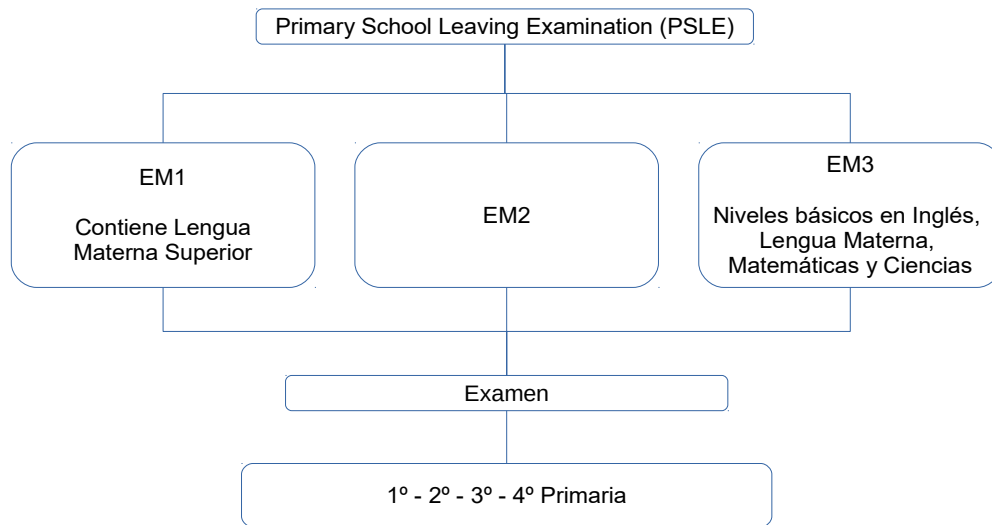


Figura 10: Las tres vías del New Education System entre 1992 y 2004.

Fuente: Tan et al., 2008.

Las medidas llevadas a cabo mejoraban la eficiencia del sistema, de modo que el gobierno conseguía más con menos: la educación en los años 80 y en adelante mejoró sus cifras, mientras que el gasto pasó de ser el 0,86% del PNB en 1960 al 0,55% en 1989.

Sin embargo, tres problemas principales aparecieron fruto del estilo autoritario del gobierno (Gopinathan, 2006).

- Acostumbró a aceptar cambios que venían de sus superiores sin hacer preguntas.
- Inculcó un exceso de confianza y dependencia de la dirección.
- Alimentó una cultura de falta de iniciativa, en la que todo el mundo recibe información en exceso para realizar su labor.

El resultado fue un sector educativo sin autonomía ni iniciativa, desvinculado del poder ejecutivo que redactaba las leyes que regulaban su trabajo. Existía un exceso de rigidez que convertía en mecánico el proceso de enseñanza-aprendizaje. El estatus social de los profesores no era mejor que en la década anterior, carecían de la adecuada supervisión y además no disponían de perspectivas alentadoras de promoción, especialmente aquellos profesores sin títulos universitarios. Esta alienación no mejoraba la ya de por sí moral baja que sufrían profesores y directores de centros, lo que se traducía en un bajo nivel de compromiso con su trabajo y, por tanto, la implementación de los cambios que surgían del estamento político no se llevaba a cabo de forma efectiva (Gopinathan, 2006).

Para hacer frente a estos problemas, en 1985 el Dr. Tony Tan Keng Yam asumió el cargo de Ministro de Educación, y en los seis años siguientes se introdujeron una serie de cambios en el sistema educativo para disminuir el gasto, dotar de mayor autonomía a los colegios y aumentar el acceso a la educación superior. Comenzó un programa de educación para alumnos con alta dotación intelectual y en 1989 comenzó el plan para eliminar la doble sesión en los colegios (Gopinathan, 2006).

Singapur ha tenido desde 1957 un sistema educativo de doble turno, esto es, en el mismo centro educativo existen una serie de grupos que cursan por la mañana y otros por la tarde (Parlamento de Singapur, 1987). En 2001, los dos turnos existentes cubrían los horarios de 7:30 a 13:00 y de 13:00 a 18:30, de lunes a viernes (Mullis, Martin, González Nagel y Flaherty, 2002).

Existen, sin embargo, importantes ventajas en el modelo de sesión única frente a la sesión doble. En Singapur, los dos principales problemas que se encontraban en el modelo de sesión doble son (Bray, 2008):

- La dificultad en organizar clases de refuerzo o ampliación para un turno, puesto que las aulas están ocupadas por los alumnos del otro turno.
- Los centros a doble turno operan como dos instituciones independientes, lo que impide crear una sensación de comunidad, al no coincidir casi nunca simultáneamente todos los alumnos y el personal del centro.

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

Abolir el sistema de doble turno tiene un elevado coste. Implica la construcción de nuevos colegios o la reforma de los colegios existentes, así como la contratación de más personal. Por esto, el cambio de doble turno a sesión única debe realizarse de forma paulatina. La intención del gobierno de Singapur es conseguir que todas las escuelas de Educación Primaria (al menos las escuelas estatales y las que reciben fondos públicos) funcionen bajo el modelo de la sesión única en 2016 (Primary Education Review and Implementation Committee, 2009), aunque la prensa se hace eco de que no todos los colegios tendrán tiempo para conseguir adaptarse al cambio. El cambio, aunque gradual, ha sido efectivo en los últimos años. En 2010, 83 escuelas de primaria (un 47% del total) ya funcionaban en el modelo de sesión única, con la perspectiva de 5 nuevas conversiones en el año siguiente (Ministerio de Educación de Singapur, 2010). En 2016, son 175 las escuelas públicas funcionando en sesión única, con las últimas 15 escuelas públicas restantes en modo de sesión única parcial. Esto significa que las clases de tercero a sexto son por la mañana, y las de primero y segundo son por la tarde (Ministerio de Educación de Singapur, 2016b).

Es una verdad demostrable que desde mediados de la década de los 80 del siglo XX el porcentaje de alumnos que aprueban los exámenes nacionales ha crecido de forma continua, así como la proporción de alumnos que prosiguen sus estudios una vez finalizada la etapa de Educación Secundaria. Oficialmente, la explicación a este hecho se encuentra en la labor desempeñada por los profesores en las aulas. Sin embargo, poco se ha dicho sobre la posibilidad de que detrás de estos más que positivos datos se encuentren las clases particulares, que gozan de una enorme popularidad en Singapur (Postiglione y Tan, 2007). Esta popularidad se debe en parte a la enorme presión que supone para los chicos el PSLE. Según Barr y Skrbiš (2008), entre el 50% y el 60% de los alumnos reciben clases de asignaturas en las que ya tienen resultados excelentes, solamente para mejorar las garantías de obtener una buena puntuación en el PSLE.

Un frente que quedó abierto en la década de los 80 fue la mala imagen que ostentaba la formación profesional entre los habitantes de Singapur, que la tenían como el destino al que los estudiantes fracasados no tenían más remedio que ir si querían continuar su formación. Esta actitud en la población se reflejaba en una aversión general entre los estudiantes a los trabajos no cualificados, lo cual suponía un grave problema para la industria del país. Como afirmó el Ministro de Educación Lee Yock Suan en 1994:

Singapur será más pobre si todos aspiran y solamente obtienen cualificaciones académicas pero nadie sabe cómo arreglar un televisor, una herramienta eléctrica o una planta de procesado. Necesitamos una mano de obra de primera categoría con una amplia variedad de conocimientos y habilidades para alcanzar un nivel de vida de primera categoría¹² (Goh y Gopinathan, 2006, p. 33).

Así, en la primera mitad de la década de los 90 se introdujeron una serie de medidas para mejorar la imagen de la formación profesional, desde la construcción de nuevos centros con inclusión de tecnologías punteras e instalaciones atractivas (con infraestructuras deportivas, por ejemplo) hasta la creación de una nueva vía en Secundaria (denominada Normal Technical) que permitiese el acceso a estos nuevos institutos técnicos a los alumnos con peores resultados en Educación Primaria. A su vez, la demanda de empleados técnicos conllevó una mejora en los salarios de estos trabajadores. De este modo, a pesar de que las enseñanzas técnicas siguen estando dirigidas a los estudiantes con dificultades en seguir la vía académica, la imagen social y las perspectivas de los alumnos que entran en los programas técnicos mejoraron considerablemente desde aquellos años. Aun así, hoy en día sigue existiendo una cultura, especialmente entre las familias chinas, de prestigio en los trabajos derivados de las enseñanzas académicas (“white-collar jobs”) frente a los trabajos menos cualificados (“blue-collar jobs”), que es inconsistente con la distribución de trabajadores que Singapur necesita desde la “Segunda Revolución Industrial” que vivió el país en la década de los 80 del siglo XX (Goh y Gopinathan, 2006).

En cuanto al currículo de Matemáticas, en 1990 se desarrolló el modelo pentagonal que se utiliza hoy en día. Este modelo va mucho más allá de mostrar una serie de conceptos que debe cubrir el colegio y que deben aprender los estudiantes. Este modelo se detalla con mayor profundidad en el capítulo correspondiente.

3.2.5. Tercera etapa: desarrollo de capacidades en el alumnado

La aparición de la economía global obligó a replantear nuevamente la educación en 1997. De una economía basada en la producción, Singapur quiso cambiar a una economía basada en el conocimiento, en la cual la riqueza de una

¹² Singapore will be poorer if everyone aspires to and gets only academic qualifications but nobody knows how to fix a TV set, a machine tool or a process plant. We need a world-class workforce with a wide variety of knowledge of skills to achieve a world-class standard of living (la traducción es propia).

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

nación se ve fuertemente influida por nuevas ideas de mercado. En junio de ese año, un nuevo paradigma educativo centrado en las capacidades (*ability-driven*) en lugar del conocimiento se inició bajo el lema “Thinking Schools, Learning Nation” (TSLN). Así, se pretendía fomentar la innovación, la resolución de problemas, la creatividad y el emprendimiento. La premisa principal de este nuevo paradigma era que, debido a que Singapur carece de recursos naturales que explotar, era necesario que la población se adaptase a un entorno económico y tecnológico siempre cambiante a través del fomento de la capacidad de aprendizaje. Pero más aún, un singapurense debe mantener esa capacidad de aprendizaje a lo largo de toda su vida (Gopinathan, 2006). Y por supuesto, para ponerlo en práctica, era necesario involucrar absolutamente a todos los agentes implicados en la educación: estudiantes, profesores, padres, trabajadores, empresas, organizaciones y gobierno (Ng, 2008).

Las dos características distintivas de este nuevo enfoque educativo eran las siguientes (Goh y Gopinathan, 2006):

- Partiendo de la premisa de que todo alumno posee alguna capacidad, el objetivo es que el sistema educativo permita y aliente que esas capacidades se desarrollen al máximo. Por ello, el sistema debe tener la suficiente flexibilidad como para adaptarse al alumno, y no al revés (Ng, 2008).
- Las capacidades desarrolladas deben aunarse con los debidos valores nacionales y sociales para que el alumno haga uso de ellas en la forma en que más valor proporcionen al país. Esto es, a lo largo de la vida estudiantil debe fortalecerse el compromiso del alumno para con su patria.

En 2004 el primer ministro de Singapur Lee Hsien Loong dio un discurso en el que, dirigiéndose a los profesores, pronunciaba una afirmación aparentemente paradójica: “Debemos enseñar menos a nuestros estudiantes, para que aprendan más” (Goh y Gopinathan, 2006). En 2005, el lema “Teach less, learn more” se convirtió en una iniciativa lanzada por el Ministerio de Educación. La idea clave detrás del lema era mejorar la calidad de lo que se enseña, en lugar de centrarse en la cantidad. El cambio vendrá a través de dos aspectos principales:

- Los profesores deben revisar el modelo de enseñanza: el “por qué”, el “qué” y el “cómo” se enseña.
- Los alumnos deben involucrarse más en el proceso de aprendizaje: es necesario aumentar su interés y su proactividad. Es ampliamente

reconocido el papel que la implicación del aprendiz en el aprendizaje tiene sobre el resultado final. Según la Association to Advance Collegiate Schools of Business (2016), “sin un compromiso voluntario por parte del estudiante, poco o ningún aprendizaje tendrá lugar”¹³ (Association to Advance Collegiate Schools of Business, 2016, p. 58)

La implicación hace que las experiencias educativas sean auténticas, que los estudiantes vivan de primera mano lo que están aprendiendo (Hung, Tan y Koh, 2006).

Es más, desde el gobierno se debe reforzar la formación del profesorado en métodos de enseñanza que involucren al alumno (Primary Education Review and Implementation Committee, 2009).

Y por tanto, no se trata de un solo programa, sino de un cambio gradual de la cantidad a la calidad de la enseñanza. Como una de las primeras medidas, en 2004 el Ministerio de Educación fusionó las vías EM1 y EM2 en una sola (Ministerio de Educación de Singapur, 2004), en las que los alumnos pueden elegir el nivel de Lengua Materna, que era la única diferencia en la práctica.

En 2008, el ya anticuado sistema de vías EM1-2-3 cambió por uno nuevo, conocido como “Subject-based Banding”, en el que las notas que obtiene el alumno en cada asignatura (Inglés, Matemáticas, Ciencias y Lengua Materna) determinan el nivel (Foundation o Standard) en el que el alumno recibirá instrucción en esas asignaturas el año siguiente. En 5.º curso son los padres los que, recomendados por el centro, deciden la configuración de asignaturas. Sin embargo, en 6.º curso es el centro el que toma esa decisión para el último curso de Educación Primaria (Ministerio de Educación de Singapur, 2014). Aunque no es común, esta segregación, según Dindyal (2006), puede tener alguna relación con el desempeño en las pruebas internacionales TIMSS. De los países que han participado en dichas pruebas, solamente Bélgica, Holanda y Rusia (aparte de Singapur) segregan a sus alumnos. Todos estos países obtuvieron puntuaciones por encima de la media en 2003.

La Educación Primaria se hizo obligatoria por ley en 2003 (aunque ya era universal, como hemos visto). Los mayores cambios se produjeron en las etapas de Educación Secundaria y posteriores, en las que la flexibilidad del nuevo sistema permitía a los alumnos seguir las vías que mejor se adecuasen a sus posibilidades.

¹³ Without intentional engagement of students, little, if any, learning will take place (la traducción es propia).

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

Prestar especial atención a la etapa de Educación Secundaria no se consideraba una pérdida de recursos, pues el valor de retorno a la sociedad de un alumno que ha finalizado esta etapa es del 18.2% en los chicos y del 17% en las chicas, lo que hace de la universalidad de la educación (en particular de la Educación Secundaria) un valor muy importante a tener en cuenta de cara a la mejora a medio y largo plazo de la situación económica de un país (Goh y Gopinathan, 2006).

Además, se avanzó en la independencia de los centros educativos, los cuales recibieron autorización para desarrollar actividades propias que permitiesen identificar, entre sus alumnos, talentos y habilidades que más tarde serían desarrollados en nuevos programas educativos, por ejemplo dirigidos a la música o a las artes.

Otro pilar básico de las reformas en educación lo supuso la entrada de las nuevas tecnologías en el aula. En 1997 se lanzó el primer ICT Masterplan, cuyo objetivo fue proveer de recursos e infraestructura a los colegios y de formación a los profesores (Choy, Wong y Gao, 2008; Jung, 2001). De hecho, se pretendía que el 30% del tiempo que los alumnos invierten en clase se dedicase a aprender con la ayuda de ordenadores. A este primer Masterplan le seguiría un segundo Masterplan en 2002 orientado a fomentar el pensamiento propio y el autoaprendizaje entre los estudiantes. De este modo, el profesor pasaba de ser un repositorio de conocimiento a ser un agente que facilita el acceso a ese conocimiento al alumno a través de la tecnología. Esto además obligó a los alumnos a adoptar un papel más activo en su propio proceso de aprendizaje (Choy et al., 2008).

Todos los cambios anteriores fueron acompañados de reformas económicas, entre otras el aumento del presupuesto para Educación del 4% al 5% del PNB. Esto, entre muchas otras cosas, contribuye a que en la actualidad el nivel salarial de los profesores sea muy alto (comparable al de abogados, ingenieros y médicos). Esta ventaja va unida a 100 horas de formación en enseñanza pagadas por el estado cada año y aumentos de sueldo a los profesores que se mantienen en su puesto un cierto número de años (en la línea de los trienios españoles). Además, se alienta a que los profesores se tomen años sabáticos en los que se pueden dedicar a formarse o a otras actividades al margen de la enseñanza en las que adquirir nuevos conocimientos (Fredriksen y Peng, 2008). Todas estas medidas contribuyen a mejorar la actitud de los profesores, que en décadas anteriores no fue tan positiva como sería deseable.

En la actualidad, el calendario escolar publicado por el Ministerio de Educación de Singapur (2016b), tanto para los alumnos de Educación Primaria como de Educación Secundaria, el curso se divide en dos semestres, cada uno de los cuales consta de dos temporadas (terms). El año lectivo comienza a primeros de año, durando cada semestre aproximadamente 5 meses con una semana de vacaciones entre cada temporada (a mediados de marzo en el primer semestre y a principios de septiembre en el segundo). Al término del primer semestre, los alumnos cuentan con un mes de vacaciones (entre finales de mayo y finales de junio), y el curso finalmente toca a su fin a mediados de noviembre, cuando los alumnos gozan de aproximadamente un mes y medio de vacaciones hasta el comienzo del siguiente curso.

3.2.6.El Modelo de Barras: elemento característico del sistema educativo de Singapur

Como ya hemos visto, parte del éxito del sistema educativo singapurense no es exportable a otros países, debido a las particularidades que encontramos en la pequeña ciudad estado. Sin embargo, Singapur aporta una metodología basada en el aprendizaje por problemas (resueltos y semirresueltos), el uso de number bonds para reforzar el concepto de adición (Ginsburg et al., 2005) y, sobre todo, el Modelo de Barras (Bar Model Method, en España conocido como “Método Singapur”). Este último tiene un especial interés en la enseñanza de la matemática porque contribuye de manera efectiva al aprendizaje de resolución de problemas, pilar básico para el Ministerio de Educación de Singapur, que considera que la resolución de problemas es el fin último y fundamental del aprendizaje de las matemáticas. Nuestra atención también se ha depositado en este método por el extensivo uso que los alumnos de Singapur hacen de él, su repercusión en el aprendizaje matemático y en el alto rendimiento de éstos en las pruebas internacionales.

No solamente en Singapur se ha incidido en la investigación en resolución de problemas, pero los resultados de su aplicación no han sido tan llamativos. En opinión de Gascón (1985), las fases para resolución de problemas propuestas por Polya (1957), a saber: entendimiento, diseño de un plan, puesta en práctica del plan y vuelta atrás para la comprobación del resultado, son demasiado generales, siendo más provechoso reducir la tipología de problemas que presentan al alumno y poder dar así unas indicaciones más concretas para que éste se enfrente al problema en cuestión. Aun así, estas tipologías tienen que ser lo suficientemente amplias como para que la resolución de los problemas sea una cuestión de aplicación de métodos generales, y no algoritmos.

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

Santos Trigo (1996), pone énfasis en que la investigación en resolución de problemas matemáticos no puede ser un ámbito exclusivo de los matemáticos, ni de los educadores. La psicología, la filosofía, la inteligencia artificial, la lingüística y la antropología, entre otras, tienen su papel en desentrañar el proceso por el cual el niño aprende a resolver problemas. En particular, en el caso de la psicología, nos encontramos con la representación, que incluye los símbolos, las reglas y las imágenes, así como sus interacciones y transformaciones. La representación mental de la realidad en forma de símbolos, esquemas, imágenes, ideas, etc. es crucial para la adquisición de conocimiento. De hecho, según afirma Rita Otero (1999):

Las imágenes parecen desempeñar un papel muy relevante en la comprensión, el aprendizaje, la memoria, la resolución de problemas, las destrezas motrices y el pensamiento creativo. Las imágenes pueden representar relaciones físicas o conceptuales entre eventos, lo que permite a los sujetos tomar decisiones sobre esas relaciones sin realizar un exhaustivo análisis lógico de la situación planteada. Más aún, las imágenes mentales pueden proporcionar nuevas ideas o intuiciones sobre cómo razonar y resolver problemas y su ocurrencia no puede explicarse recurriendo sólo a métodos analíticos de pensamiento (p. 104).

Así, pues, en aras de la descripción de estrategias concretas para resolver problemas más o menos generales, haciendo uso de la representación visual, en 1983 se introdujo en las aulas de Singapur el modelo de barras (Cheong, 2002).

Éste es un método para resolver problemas de índole aritmética, la cual incluye a una enorme variedad de problemas en los que su resolución implica el uso de las cuatro operaciones básicas. Como describen Urbano Ruiz, Fernández Palop y Fernández Bravo (2016b), el método consiste en la representación gráfica de los datos del problema y de las cantidades desconocidas a través de bloques rectangulares. En teoría, lo cual no siempre es fácil, el tamaño de los bloques debe concordar con el valor que representan.

El aporte de este método a la resolución de problemas radica en que, de forma no algorítmica, ayuda al alumno a diseñar el plan, esto es, a determinar qué operaciones se deben realizar para llegar al resultado. Nótese que, según Polya (1957), ésta es la fase más compleja, por lo que toda la ayuda que se pueda proporcionar al alumno es bienvenida.

Para la representación del modelo de barras que se ajusta a un problema dado, se puede hacer uso de los siguientes pasos (Cabo Nodar y Moreno Pineda, 2007):

- Leer con atención el problema completo.
- Identificar los sujetos del problema.
- Dibujar una barra unidad para cada uno de ellos.
- Leer el problema de nuevo, haciendo paradas en cada dato numérico del enunciado.
- Etiquetar las barras unidad con los datos suministrados por el enunciado.
- Identificar la cantidad desconocida que constituye la pregunta del problema y etiquetarla.
- Realizar las operaciones correspondientes y escribir el resultado en el gráfico.
- Redactar, como una oración completa, la solución del problema.

La representación de las barras asociadas al problema se incluye en los libros de texto desde primer curso (Jackson, 2005), aunque su aplicación va siendo paulatina. Al principio se dibujan los elementos representados en la cantidad correspondiente (por ejemplo, ocho galletas dentro de un rectángulo). Se organizan de una forma cómoda, en filas y columnas, pero ya en 2.º curso de Educación Primaria, se dibujan en una sola fila para, en tercero de Educación Primaria, dejar de dibujar los elementos y pasar a etiquetar la barra con un número. Esto permite, además de tardar menos en dibujar la barra, dar un salto de abstracción por un lado y, por otro, usar números más grandes.

La puesta en práctica del modelo incluye tres variedades fundamentales, cada una dirigida a cierto tipo de ejercicios. Estos tipos de ejercicios no están unívocamente asociados a un modelo concreto, sino que a menudo un mismo ejercicio puede ser resuelto mediante el uso de más de un modelo. Las tres variedades son Modelo Todo-Parte, Modelo de Comparación y Modelo Antes-Después. Urbano Ruiz, et al. (2016b), entre otros, ofrecen una serie de ejemplos sobre el uso y el alcance de cada uno de ellos.

El objetivo del modelo, en definitiva, es por un lado, como ya hemos mencionado antes, ayudar al alumno a diseñar el plan para resolver el problema y luego desarrollarlo y evaluarlo. Pero más allá de esto, se han comprobado (por ejemplo, Ho y Lowrie, 2014; Thirunavukkarasu y Senthilnathan, 2014) beneficiosos efectos del uso de esta técnica sobre los alumnos que comienzan a aprender álgebra: en resumen, las interrogaciones con que deben etiquetarse las barras desconocidas y algunas manipulaciones aritméticas que se realizan al interpretarlas recuerdan fuertemente a las incógnitas y a las operaciones de despeje en ecuaciones de primer grado.

Sin estar exento de dificultades en su aplicación (puestas de manifiesto por Cheong, 2002), el modelo de barras está siendo utilizado fuera de Singapur en países como Estados Unidos (más de 600 escuelas lo implementaban en 2007 según Hoven y Garelick, 2007), Inglaterra y 47 países más (Alonso Tello, López Barriga y de la Cruz Vicente, 2013). Esta expansión se puede explicar a través de dos factores:

- Se considera uno de los elementos diferenciales que contribuye al éxito de los programas educativos singapurenses en Matemáticas, puesto de manifiesto por los programas PISA y TIMSS.
- Es un método descontextualizado de la sociedad o las leyes de Singapur, por lo que se puede incorporar exitosamente a cualquier plan de estudios de cualquier país.

El diseño y el extensivo uso del modelo de barras por parte de los alumnos de Educación Primaria obedecen a la orientación que el Ministerio de Educación de Singapur le ha dado al currículo de Matemáticas, como veremos en la siguiente sección.

3.3. El currículo de Matemáticas de 6.º curso de Singapur

El currículo de Matemáticas actualmente vigente en 6.º curso de Educación Primaria fue redactado en 2006 por un departamento específico del Ministerio de Educación de Singapur, llamado Curriculum Planning and Development Division.

La etapa de Educación Primaria, en lo concerniente a su currículo de Matemáticas, se encuentra en estos momentos en proceso de renovación. En 2013 un nuevo currículo fue implementado para 1.er curso, en 2014 para 2.º curso, en 2015 para 3.er curso y en 2016 para 4.º curso. Los cursos superiores continúan con el currículo diseñado en 2007.

El documento que contiene los currículos de los diferentes cursos de Educación Primaria (Ministerio de Educación de Singapur, 2006) es público, y puede descargarse desde la página web del Ministerio de Educación de Singapur (Ministerio de Educación de Singapur, 2016c). Debido a la remodelación del currículo que comenzó en 2013 en primer curso de Educación Primaria y que se va aplicando cada año a un curso superior, habrá que esperar a 2018 para conocer los contenidos y los cambios a que está sujeto 6.º curso de Educación Primaria.

Ya en el prólogo de este documento se anuncia que el currículo de Matemáticas se centra en el desarrollo de las capacidades del alumno en resolución de problemas, lo cual pone de manifiesto la necesidad y la importancia de dotar a los alumnos de herramientas potentes para enfrentarse a ellos, como es el modelo de barras que hemos conocido. Además, en un año como 2006, que es cuando se desarrolló el presente currículo, se da también importancia al uso de la tecnología (calculadoras, ordenador) como apoyo al aprendizaje.

El currículo ha sido diseñado en espiral. Este concepto fue ideado por Bruner (Barrón Ruiz, 1993; Esteban Guitart, 2009; Monereo Font, Castelló Badia, Clariana, Palma i Muñoz y Pérez Cabaní, 2000; Prince y Felder, 2006). La idea principal es que al alumno se le vayan presentando una serie de contenidos que se repiten año tras año, pero cada vez que el alumno revise el concepto, lo haga con más profundidad.

La Figura 11, a continuación, resume el enfoque residente en el currículo de Matemáticas para todos los niveles, y conocido como el modelo pentagonal del currículo.

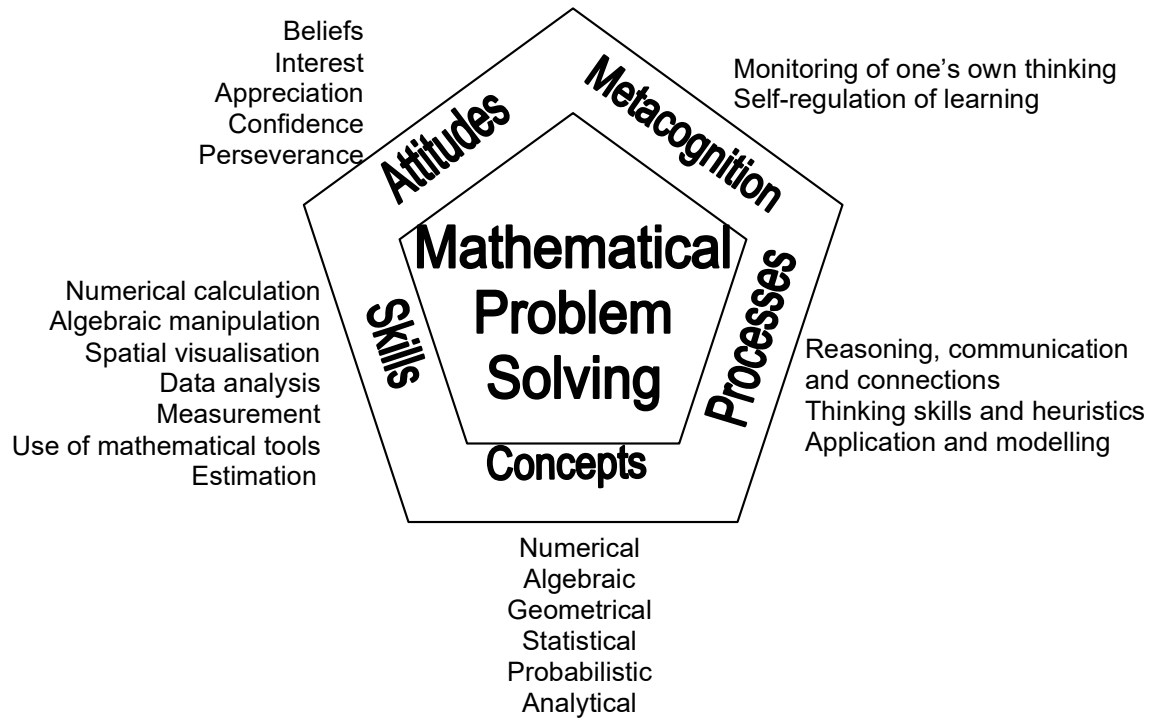


Figura 11. Modelo pentagonal del currículo de Matemáticas.

Fuente: Ministerio de Educación de Singapur (2006).

Como puede verse en la figura anterior, en el centro del pentágono, remarcando la importancia y el objetivo en torno al cual se deben dirigir los esfuerzos en el aula, está la resolución de problemas matemáticos. En el currículo no solamente se habla de problemas matemáticos sin especificar, sino que se mencionan diferentes clases de problemas: no rutinarios, de respuesta abierta, de enunciado verbal realista, de la vida cotidiana... Incluso son clasificados por el número de pasos necesarios para su resolución: 1, 2 o 3. (Piñeiro, Castro-Rodríguez y Castro Martínez, 2016)

El fuerte interés del currículo por la resolución de problemas se retroalimenta junto con la investigación. Según Foong (2007), de la investigación llevada a cabo por profesores en Singapur entre 1991 y 2005, un total de 101 trabajos de máster y doctorado, el área de estudio más frecuentemente visitada fue la resolución de problemas, con un 27% de los informes (repartidos a partes iguales entre Educación Primaria y Educación Secundaria), a pesar de que el interés por este campo ha ido disminuyendo internacionalmente a lo largo de los años (Lester, 1994).

El adecuado desarrollo de la capacidad de resolver problemas reside a su vez en cinco componentes principales: los conceptos, las habilidades, los procesos, las actitudes y la metacognición.

Los conceptos cubren los contenidos teóricos que deben manejar los alumnos, que a su vez se dividen en seis bloques: números, álgebra, geometría, estadística, probabilidad y análisis. En el currículo se hace hincapié en que los alumnos deben conocer cada concepto matemático no como un ente aislado de los demás, sino integrado en un todo que son las matemáticas. Asimismo, se alienta al profesorado al uso de técnicas manipulativas con cierta frecuencia.

Las habilidades en matemáticas incluyen el cálculo numérico, la manipulación algebraica, la visualización espacial, el análisis de datos, la medida, el uso de las herramientas matemáticas y la estimación. Sin embargo, desde el currículo se pretende evitar el uso de procedimientos sin comprender los principios subyacentes a éstos.

Los procesos matemáticos son las habilidades involucradas en la adquisición y aplicación del conocimiento matemático. Estas habilidades son de tres tipos:

- En primer lugar, razonamiento, comunicación y conexiones. La primera se refiere al uso de la lógica para construir argumentaciones y analizar situaciones de índole matemática. La segunda, al uso adecuado del lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas con precisión, rigor, concisión y lógica. Por último, las conexiones se refieren a los puentes que se deben tender entre distintos conceptos matemáticos y entre éstos y la realidad. Estos tres subprocesos deben permear el día a día del aprendizaje matemático en todos los niveles académicos.
- A continuación, habilidades mentales y heurística. Son las estrategias que los alumnos pueden aplicar en la solución de problemas matemáticos. Las primeras son herramientas de índole abstracta, como la clasificación, la comparación, la secuenciación, el análisis de partes y totales, la identificación de patrones y relaciones, la inducción, la deducción y la visualización espacial. Por su parte, las estrategias heurísticas son técnicas más concretas que las mentales, y se desprenden de la aplicación de éstas a un problema determinado. Se dividen en cuatro categorías en función de para qué se utilizan: representar, estimar, seguir el proceso de resolución o cambiar el problema.
- Por último, aplicación y modelización. Consiste en el proceso de plantear modelos matemáticos que representen y ayuden en la resolución de problemas de la vida diaria. Dentro del currículo, este proceso juega un papel vital.

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

Las actitudes se refieren a la relación que los estudiantes establecen y mantienen con las matemáticas, las cuales se forjan a través de las experiencias educativas que éstos viven. Puesto que es fundamental que las actitudes sean lo más positivas posible, se ha de intentar que el aprendizaje de las matemáticas sea divertido y significativo para el alumno.

Por último, la metacognición se refiere al control de los procesos de pensamiento y de la conciencia de los mismos. En el currículo se sugiere a los profesores una lista de actividades para mejorar la metacognición de los alumnos:

- Presentar a los alumnos procedimientos y estrategias de resolución de problemas generales y su forma de aplicación.
- Animar a los estudiantes a expresar oralmente las estrategias que utilizan para resolver problemas.
- Proporcionar a los alumnos problemas que requieran no solamente una resolución, sino una planificación previa y una evaluación posterior de los resultados.
- Animar a los estudiantes a buscar otras formas alternativas de resolver el mismo problema y a estudiar si son apropiadas y razonables.
- Permitir que los estudiantes discutan sobre cómo resolver un determinado problema.

La calculadora no debe introducirse hasta los dos últimos cursos de Educación Primaria, si bien su introducción no debe reducir la importancia del uso del cálculo mental y las capacidades para resolver cálculos aritméticos. Es interesante el hecho de que se sugiere el uso de calculadoras científicas, pues aunque en Educación Primaria solamente se utilizarán las funciones más básicas, el alumno podrá seguir utilizando la misma calculadora en los años de Secundaria.

Asimismo, se anima a los profesores a utilizar herramientas informáticas gratuitas al servicio del aprendizaje, tales como hojas de cálculo. Tal y como se reconoce en el currículo, los ordenadores y la tecnología son poderosas herramientas para animar al alumno a emprender actividades y motivarles en el aprendizaje de las matemáticas.

Con todo esto en mente, el currículo de 6.º curso de Educación Primaria en Singapur, desarrollado en 2007 con vigencia planeada hasta 2018, consta de los bloques, temas y contenidos recogidos en la Tabla 4 (la cual se amplía para 4.º, 5.º y 6.º cursos de Educación Primaria en el Anexo 2).

Tabla 4

Bloques y contenidos del currículo de Matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria.

Bloque	Contenidos
Bloque 1. Fracciones	Cuatro operaciones
Bloque 2. Porcentaje	Porcentaje
Bloque 3. Razón	Razón
Bloque 4. Velocidad	Distancia, tiempo y velocidad
Bloque 5. Medida	Área y circunferencia del círculo Área y perímetro de una figura compuesta Volumen del cubo y del ortoedro
Bloque 6. Geometría	Figuras geométricas Desarrollos de cuerpos geométricos
Bloque 7. Análisis de datos	Diagramas de sectores
Bloque 8. Álgebra	Expresiones algebraicas en una variable

Fuente: Ministerio de Educación de Singapur (2006).

Sin embargo, al analizar los libros de texto de manera más directa, se observan ejercicios que no pertenecen al currículo de 6.º curso, sino a cursos anteriores. Estos ejercicios se encuentran en capítulos específicos de repaso, compuestos por ejercicios pertenecientes a bloques y conceptos muy variados y mezclados unos con otros. De este modo, se pueden incluir en 6.º curso contenidos de repaso correspondientes

a cursos anteriores sin necesidad de dedicar un capítulo específico para volver a impartirlos.

3.3.1. Objetivos

Independientemente de la etapa que se esté considerando, la educación en matemáticas singaporense persigue unos objetivos comunes (Ministerio de Educación de Singapur, 2006):

1. Adquirir los conceptos y habilidades matemáticas necesarios para la vida diaria, y para el aprendizaje continuo en matemáticas y otras disciplinas relacionadas.
2. Desarrollar los procesos necesarios para adquirir y aplicar dichos conceptos y habilidades.
3. Desarrollar el pensamiento matemático y la resolución de problemas y aplicar estas habilidades para formular y resolver problemas.
4. Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas, y entre las matemáticas y otras disciplinas.
5. Desarrollar actitudes positivas hacia las matemáticas.
6. Hacer un uso efectivo de una variedad de herramientas matemáticas (incluyendo las Tecnologías de Información y Comunicación, o TIC) en el aprendizaje y aplicación de las matemáticas.
7. Generar trabajos imaginativos y creativos surgidos de ideas matemáticas.
8. Desarrollar las habilidades para razonar con lógica, comunicar matemáticamente y aprender tanto de forma individual como cooperativa.

La tendencia de centrar el currículo en la resolución de problemas proviene de 1992. Sin embargo, en los últimos años de la primera década del siglo XXI, a raíz de una implementación limitada de resolución de problemas a partir de baterías de ejercicios rutinarios, los exámenes oficiales han incorporado ejercicios novedosos y no rutinarios. De este modo, se obliga a los profesores a trabajar este tipo de ejercicios en clase (Anderson, 2009).

Los objetivos en vigor para toda la etapa de Educación Primaria son los siguientes (Ministerio de Educación de Singapur, 2006):

1. Desarrollar el entendimiento de los siguientes conceptos matemáticos: números, geometría, estadística y álgebra.
2. Reconocer relaciones espaciales en dos y tres dimensiones.
3. Reconocer patrones y relaciones en matemáticas.
4. Usar sistemas métricos comunes.
5. Usar el lenguaje matemático, símbolos y diagramas para representar y comunicar ideas matemáticas.
6. Realizar operaciones con números naturales, fracciones y decimales.
7. Utilizar instrumentos geométricos.
8. Realizar manipulaciones algebraicas simples.
9. Utilizar la calculadora.
10. Desarrollar la capacidad de realizar operaciones de cálculo mental.
11. Desarrollar la capacidad de realizar estimaciones.
12. Desarrollar la capacidad de comprobar la razonabilidad de un resultado.
13. Presentar e interpretar información de forma escrita, gráfica, en forma de diagrama o de tabla.
14. Usar los conceptos matemáticos aprendidos para resolver problemas.
15. Utilizar las herramientas heurísticas apropiadas para resolver problemas.
16. Aplicar las matemáticas para resolver problemas de la vida diaria.
17. Pensar de forma lógica y extraer conclusiones deductivamente.
18. Desarrollar una mente inquisitiva a través de actividades de investigación.
19. Disfrutar aprendiendo matemáticas a través de una variedad de actividades.

Recordemos que el currículo de Matemáticas se encuentra en proceso de renovación. Aunque a la fecha de elaboración de este trabajo no se conocen los detalles concernientes a 6.º curso de Educación Primaria (cuyo cambio de currículo tendrá lugar en 2018), sí existe un documento publicado por el Ministerio de Educación de Singapur, en el que nos hemos basado para la elaboración de este apartado,

que describe el currículo de forma genérica para la etapa de Educación Primaria completa, aunque los contenidos detallados solamente se conocen para los cursos primero a cuarto. Los objetivos de este nuevo currículo son mucho más generales, a saber (Ministerio de Educación de Singapur, 2016a):

- Adquirir los conceptos y las habilidades matemáticas necesarios para el uso cotidiano y el aprendizaje continuo de las matemáticas.
- Desarrollar las habilidades de pensamiento, razonamiento, comunicación, aplicación y metacognitivas a través de un enfoque matemático de la resolución de problemas.
- Generar confianza y promover el interés por las matemáticas.

Como podemos observar, a pesar de considerar una lista mucho menos precisa, la resolución de problemas sigue ostentando un papel central en los objetivos del currículo.

3.3.2. Contenidos

El Ministerio de Educación de Singapur (2006) es muy preciso en los contenidos que deben impartirse en las clases de matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria. Estos contenidos se reparten en ocho bloques principales, a saber: fracciones, porcentaje, razón, velocidad, medida, geometría, análisis de datos y álgebra. A continuación definimos los conceptos que se incluyen en cada uno de esos bloques:

Fracciones

- División de un número entero o una fracción propia por una fracción propia sin usar la calculadora.
- Se excluye la división de una fracción impropia o un número mixto por una fracción propia, así como la división entre una fracción impropia o un número mixto.

Porcentaje

- Cálculo del total dada la cantidad parcial y el porcentaje.
- Cálculo de aumentos y disminuciones porcentuales.
- Resolución de problemas de enunciado sobre porcentajes.
- Se excluye el cálculo de pérdidas y beneficios porcentuales.

Razón

- Expresión de una cantidad como una fracción de otra dada la razón entre ambas, y viceversa, es decir, cálculo de la razón entre dos cantidades dada una cantidad como fracción de otra dada.
- Cálculo de cuántas veces es más grande una cantidad que otra dada la razón entre ambas y viceversa, es decir, cálculo de la razón entre dos cantidades dado el dato de cuántas veces es más grande una que la otra.
- Expresión de una cantidad como una fracción de otra dadas las dos cantidades.
- Cálculo del total o la unidad cuando éste se divide en partes según una razón dada.
- Resolución de problemas de enunciado que incluyen dos parejas de razones.

Velocidad

- Concepto de velocidad y velocidad media.
- Relación entre distancia, tiempo y velocidad.
 - $\text{Distancia} = \text{Velocidad} \times \text{Tiempo}$
 - $\text{Velocidad} = \text{Distancia} / \text{Tiempo}$
 - $\text{Tiempo} = \text{Distancia} / \text{Velocidad}$
- Cálculo de la velocidad, distancia o tiempo dadas las otras dos cantidades.
- Escritura de la velocidad en diferentes unidades, como km/h, m/min, m/s y cm/s.
- Resolución de problemas de enunciado de 3 pasos relacionados con la velocidad y la velocidad media.
- Se excluye la conversión de unidades, por ejemplo de km/h a m/min.

Medida

- En el área y circunferencia del círculo:
 - Uso de fórmulas para calcular el área y circunferencia de un círculo.
 - Cálculo del área y el perímetro del semicírculo o de un cuarto de círculo.
 - Resolución de problemas de enunciado sobre el área y el perímetro.
 - Se excluye el cálculo del radio o del diámetro de un círculo dada su área o su circunferencia.
- En el área y perímetro de una figura compuesta:
 - Cálculo de área y perímetro de una figura compuesta por las siguientes figuras: cuadrado, rectángulo, triángulo, semicírculo y cuarto de círculo.
- En el volumen del cubo y del ortoedro:
 - Cálculo de una de las dimensiones del ortoedro dado su volumen y las otras dimensiones.
 - Cálculo de la longitud de una arista de un cubo dado su volumen.
 - Cálculo de la altura de un ortoedro dado su volumen y el área de su base.
 - Cálculo del área de una cara de un ortoedro dado su volumen y una dimensión.
 - Uso de los símbolos $\sqrt{\quad}$ y $\sqrt[3]{\quad}$
 - Resolución de problemas sobre el volumen de un cubo o un ortoedro.

Geometría

- En las figuras geométricas:
 - Cálculo de ángulos desconocidos en figuras geométricas incluyendo el cuadrado, el rectángulo, el paralelogramo, el rombo, el trapecio y el triángulo.
- En los desarrollos planos de cuerpos geométricos:
 - Representación 2D del cubo, del ortoedro, del cono, del cilindro, del prisma y de la pirámide.
 - Identificación de los desarrollos planos del cubo, ortoedro, prisma y pirámide.
 - Identificación del sólido que se puede formar con un desarrollo dado.
 - Fabricación de sólidos tridimensionales a partir de un desarrollo dado.
 - Se excluyen los desarrollos de cilindro y cono.

Análisis de datos

- Lectura e interpretación de diagramas de sectores.
- Resolución de problemas de un solo paso usando la información presente en diagramas de sectores.
- Se excluye el uso de grados para los cálculos.

Álgebra

- Representación de un número desconocido usando una letra.
- Expresiones algebraicas simples, como:

$$y \pm 2, 6 \pm y$$
$$\frac{y+y}{3y}$$
$$\frac{y}{2}$$
$$\frac{3 \pm y}{5}$$

- Interpretación de:
 - $3y$ como $y+y+y$ o $3 \times y$
 - $\frac{y}{2}$ como $y \div 2$ o $\frac{1}{2}y$
 - $\frac{3 \pm y}{5}$ como $(3 \pm y) \div 5$ o $\frac{1}{5} \times (3 \pm y)$
- Simplificación de expresiones algebraicas.
- Evaluación de expresiones algebraicas simples por sustitución.
- Resolución de problemas de enunciado con expresiones algebraicas.
- Se excluye:
 - Evaluación de expresiones en las que aparece una variable en el denominador, como $\frac{1}{x}$.
 - Simplificación de expresiones que contienen coeficientes fraccionarios o paréntesis.

3.3.3. Metodología

El currículo deja suficiente libertad al profesor para diseñar sus clases, siempre y cuando se atenga a los contenidos claramente establecidos y delimitados por el organismo ministerial encargado de elaborarlos, llamado Curriculum Planning and Development Division o CPDD (Wang-Iverson et al., 2009).

Aunque el currículo de 2006 no incluía información precisa sobre la metodología a emplear en el proceso de enseñanza, el currículo de 2016 (Ministerio de Educación de Singapur, 2017) sí es explícito al respecto. En él se anima a que los alumnos se enfrenten a diferentes situaciones para fomentar determinadas capacidades y actitudes relacionadas con el aprendizaje, en particular:

1. Situaciones en las que el alumno pueda descubrir resultados matemáticos por sí mismo, para animarle a que sea inquisitivo y curioso.
2. Situaciones en las que el alumno trabaje en grupo y presente sus ideas mediante usando el lenguaje matemático, para desarrollar las habilidades comunicativas y colaborativas.
3. Situaciones en las que el alumno se marque unos objetivos de aprendizaje y trabaje para cumplirlos. Estas situaciones ayudan a desarrollar hábitos de autoaprendizaje.

Además de las anteriores, los estudiantes deben tener oportunidad de (Ang, 2001):

1. Tomar notas y organizar la información de forma coherente y significativa.
2. Practicar capacidades matemáticas básicas con el objetivo de dominarlas.
3. Mejorar su aprendizaje mediante retroalimentación proporcionada por las evaluaciones del profesor.
4. Resolver problemas novedosos, haciendo uso de un repertorio de estrategias heurísticas.
5. Discutir, articular y explicar ideas para desarrollar su capacidad de razonamiento.
6. Realizar un proyecto de modelización. Con esto el currículo se refiere al proceso de traducir a ideas matemáticas una situación real problemática, con la intención de que, al resolver o intentar resolver el problema matemático, obtengamos una solución válida al problema real.

El currículo está lleno de referencias a las llamadas “competencias del siglo XXI”, de entre las que destacan el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, el trabajo colaborativo y el pensamiento crítico para con las soluciones obtenidas.

Dentro de la libertad con la que el profesor cuenta para diseñar su modelo de clases, la metodología empleada en el aula debe tener en cuenta los tres principios de las matemáticas y las tres fases del aprendizaje matemático en el aula, que exponemos a continuación.

3.3.3.1. Principios de las matemáticas

Los tres principios de las matemáticas que el profesor debe tener en cuenta en todo momento son:

1. Enseñar es para aprender; aprender es para entender; entender es para razonar y aplicar, y en última instancia para resolver problemas.

Este principio pone especial énfasis en que aprender matemáticas debe centrarse en entenderlas, y no en aprender fórmulas. Solamente entendiendo las matemáticas se pueden resolver problemas, que son el punto central del currículo.

2. La enseñanza debe partir del conocimiento del estudiante; deben tenerse en cuenta los intereses y experiencias y los alumnos e involucrarlos en un aprendizaje activo y reflexivo.

Al identificar tanto los conocimientos previos de los alumnos como sus intereses y capacidades, el profesor puede proponer tareas que les resulten estimulantes y, por tanto, que participen activamente y tomen las riendas del proceso de aprendizaje.

3. La enseñanza debe conectar el aprendizaje con el mundo real, utilizar las nuevas tecnologías y enfatizar las competencias del siglo XXI.

De este modo, los alumnos pueden comprender el significado y la relevancia de las matemáticas en tanto en cuanto se aplican para modelizar y resolver problemas de la vida real.

3.3.3.2. Fases del aprendizaje matemático

Por otra parte, a la hora de impartir una unidad didáctica, el currículo indica que se deben recorrer tres fases: preparación, participación y maestría.

En la fase de preparación, el profesor prepara a sus estudiantes para lo que están a punto de aprender. Esto implica tener en cuenta tres aspectos:

1. Conocimiento previo. El profesor debe asegurarse de que los alumnos cuentan con los conocimientos y habilidades requeridos para asimilar los nuevos conocimientos. Para ello, es necesario aplicar algún tipo de evaluación diagnóstica que revele esta información al profesor.
2. Contextos motivacionales. Éstos deben ser proporcionados al profesor, y además deben adaptarse a las particularidades de los alumnos. Se puede tratar de historias, juegos, contextualizaciones del objeto de aprendizaje en la vida real o, en los alumnos mayores, aplicaciones en otras disciplinas.
3. Entorno de aprendizaje. El profesor debe establecer unos procedimientos claros y manifiestos para organizar a los alumnos y administrar los recursos del aula. La existencia de unas normas explícitas ayudan al establecimiento de una relación profesor-alumno más provechosas para el aprendizaje.

La segunda fase, la de participación, es aquella en la que el profesor hace uso de una serie de recursos pedagógicos destinados a que los alumnos aprendan correctamente los nuevos conocimientos y habilidades. Tres de las más importantes son:

- Aprendizaje por actividades. Es particularmente eficaz en Educación Primaria. Consiste en guiar a los alumnos a que, a partir de la manipulación de objetos físicos o la realización de ejemplos, sean capaces de alcanzar conceptos o resultados abstractos.
- Pregunta propuesta por el profesor. A partir de una o varias preguntas relacionadas lanzadas por el profesor, se anima a que los alumnos investiguen y encuentren respuestas por sí mismos.
- Instrucción directa. Consiste en que el profesor presente, explique y demuestre los nuevos conceptos y habilidades. Dado que mantener la atención de los alumnos es clave, se recomienda utilizar herramientas como vídeos, imágenes, contextos reales e incluso el humor.

La última fase se dedica a la consolidación del aprendizaje recién adquirido. El currículo propone una lista, no exhaustiva, de tres medios para lograrlo:

- **Práctica motivada.** A través de la práctica se alcanza la perfección. Esta práctica debe incluir repetición pero también variación, y debe incluir elementos motivadores, como juegos.
- **Repaso reflexivo.** Se consigue, por ejemplo, mediante resúmenes, esquemas, mapas conceptuales y diarios o cuadernos de notas. De esta forma, los alumnos vuelven sobre su propio aprendizaje, reflexionando sobre él y comprobando hasta qué grado lo han conseguido. Estas actividades están muy relacionadas con el proceso de metacognición, uno de los cinco pilares en torno al cual se ha diseñado el currículo.
- **Extensión del aprendizaje.** Aquellos alumnos que el profesor considere suficientemente dotados y con la motivación adecuada pueden enfrentarse a tareas de mayor dificultad que mejoren su amplitud de pensamiento y su entendimiento de la materia.

3.3.4. Evaluación

En el proceso de enseñanza-aprendizaje, la evaluación es una parte fundamental. Proporciona al profesor información muy valiosa sobre la marcha del proceso, mediante la cual puede alterar y redirigir su actividad. Pero a su vez debe proporcionar información al alumno sobre cuál es su posición en su propio aprendizaje y cómo mejorarlo, a través de una retroalimentación adecuada.

En el currículo (Ministerio de Educación de Singapur, 2017) se distinguen tres tipos de evaluación, sumativa, formativa y diagnóstica.

- La sumativa se utiliza para medir el grado de aprendizaje de los alumnos. Los medios más usuales para desarrollarla son los controles y exámenes, cuyo resultado normalmente es una nota.
- La formativa y la diagnóstica buscan proporcionar, respectivamente, una retroalimentación inmediata sobre su aprendizaje a los alumnos y sobre su actividad a los profesores.

3. Singapur: aspectos contextuales y educativos

Las dos últimas, por ser las que se dirigen a la mejora del aprendizaje del alumno, que es el objetivo final del proceso de enseñanza-aprendizaje, serán las predominantes en el aula.

La evaluación es una parte integral del proceso, por lo que debe haber una evaluación continua del mismo, integrada e intercalada con la instrucción. Existen muchas formas de hacerlo, como por ejemplo la observación de los alumnos mientras resuelven problemas, o bien hacer que sean los alumnos los que evalúen su propio trabajo para que reflexionen sobre lo que saben y cómo mejorarlo.

Una forma particularmente útil de evaluar consiste en lanzar preguntas para comprobar el grado de entendimiento que los alumnos han alcanzado sobre un concepto concreto, corregir una idea errónea o hacer énfasis en un aspecto concreto. Asimismo, utilizando respuestas abiertas se suscita la reflexión por parte de los alumnos. Y, en todo caso, se refuerzan las habilidades de comunicación y de utilización del lenguaje matemático.

Otra de las formas de evaluar recomendadas en el currículo de 2013 (Ministerio de Educación de Singapur, 2017) es el uso de rúbricas. Las rúbricas son tablas de doble entrada en las que se desglosan en una dimensión los diferentes elementos a evaluar (conceptos, habilidades, etc.) y en la otra dimensión el grado de consecución de los mismos por parte del alumno (Generelo-Pérez, Escobar, Agudo y Rico, 2010). Las rúbricas ayudan al profesor a saber qué buscar en el trabajo de un alumno y a estructurar la retroalimentación que recibirá éste.

Las rúbricas, utilizadas en conjunción con tareas de evaluación basada en el desempeño, suponen una valiosa fuente de información, no tanto sobre el grado de adquisición de contenidos matemáticos como de procesos matemáticos. De hecho, la evaluación basada en el desempeño no consiste tanto en hacer que el alumno demuestre cuánto sabe (como los exámenes tradicionales) como en que demuestre cómo de bien sabe utilizar lo que sabe. La clave es hacer que el alumno aplique sus conocimientos en un contexto apropiado en la creación de algo nuevo, ya sea un producto manipulable o una respuesta a una pregunta, mediante el uso del pensamiento superior y no meramente de la memoria (Herrington y Herrington, 1998).

3.3.5. Recursos

El currículo, tanto el de 2007 (Ministerio de Educación de Singapur, 2006) como el nuevo y todavía inconcluso de 2013 (Ministerio de Educación de Singapur, 2017), no hace referencia expresa a los recursos que el profesor debe emplear en el aula, con la excepción de las calculadoras, cuyo uso está definido en el currículo de 2007. A pesar de ello, el currículo actual exhorta a los profesores a utilizar prácticas de enseñanza basadas en actividades, proponiendo como ejemplo que los alumnos recorten rectángulos de cartón para estudiar la relación entre área y perímetro.

En cuanto a las nuevas tecnologías (TIC), a lo largo del texto del currículo de 2013 se mencionan repetidamente las habilidades del siglo XXI, aludiendo entre ellas expresamente las TIC, lo cual implica que los profesores deben hacer uso de las nuevas tecnologías en el aula. Kaur (2014a) informa de que los profesores hacen uso frecuente de recursos electrónicos, ya sea disponibles en internet o en soporte físico (CD-ROM). En otro estudio (Tay, Lim, Lim y Koh, 2012), se reporta el uso de TIC en 4.º curso de Educación Primaria en forma de juegos y aplicaciones en línea, blogs, redes sociales y sistemas de gestión del aprendizaje.

Kaur (2014a) también refleja la importancia que tienen los libros de texto en el día a día de los colegios de Singapur. Su estrecha adherencia a los contenidos del currículo hacen que sea muy práctico para los profesores utilizarlos tanto para la instrucción como para mandar deberes para casa.

Los excelentes resultados obtenidos por Singapur en las pruebas internacionales en las que ha participado (como hemos visto anteriormente) han puesto a la nación insular en el punto de mira de otros muchos países, en busca de las claves para una mejor educación. Y por supuesto, gran parte de la atención se ha centrado en el currículo. Sin embargo, como puntualiza Dindyal (2006), el currículo de Singapur funciona muy bien en Singapur, pero no es extrapolable a otros países. En Singapur, como hemos visto en capítulos anteriores, existe un contexto sociocultural muy específico que afecta fuertemente a la forma en que se implementa el currículo. En otros países, con contextos socioculturales completamente distintos, la mera aplicación del currículo no tiene porqué obtener una mejora en el aprendizaje de los alumnos. Otros muchos factores habrían de ser tenidos en cuenta, como la formación del profesorado, el equipamiento existente en las aulas, el papel de la familia y un largo etcétera (García-Caballero, 2010).

3.4. Resumen y conclusiones

Hemos visto como Singapur es una nación sumamente joven, pues alcanzó la independencia de la Corona Británica ya entrada la segunda mitad del siglo XX (Corfield, 2010). Sin embargo, ese hecho no le ha impedido prosperar económicamente, pues ha sabido explotar su disposición geográfica privilegiada de forma que su economía ha sido muy próspera en las últimas décadas.

Una de las particularidades de Singapur es su composición étnica, pues aunque la mayoría de la población es de etnia china, conviven con malayos, indios y otros grupos minoritarios (Chee y Evers, 1972). Esta diversidad étnica trae aparejada una diversidad lingüística y por tanto existen cuatro lenguas oficiales en el país: chino, malayo, tamil e inglés. Sin embargo, la heterogeneidad social no ha impedido al gobierno la instauración de un sentimiento patriótico común (Goh y Gopinathan, 2006).

El gobierno de Singapur ha considerado desde el nacimiento del país que la educación es un pilar fundamental de progreso, y ha utilizado sus recursos de una forma muy eficiente especialmente en las primeras etapas (Goh y Gopinathan, 2006; Postiglione y Tan, 2007). Su sistema educativo ha estado siempre caracterizado por la segregación por capacidades de los alumnos, por la formación del profesorado y por la innovación, puesta de manifiesto por una política de reducir contenidos para mejorar el aprendizaje de lo que es más importante (Tan y Abbas, 2009), sus metodologías basadas en el constructivismo y, sobre todo en matemáticas, el desarrollo del modelo de barras (Cheong, 2002).

Esta actitud de mantenimiento de la excelencia y de la promoción de metodologías innovadoras ha puesto el currículo de Singapur, el cual está fuertemente centrado en la resolución de problemas, en el punto de mira de muchos investigadores alrededor del mundo, en busca de las claves de su éxito (por ejemplo, Fogarty y Pete, 2010; Ginsburg et al., 2005; Kaur, 2003). Desafortunadamente, la respuesta no es tan sencilla, pues ni el currículo tiene todas las claves, ni su extrapolación a otros sistemas educativos es una tarea fácil, en el caso de que sea posible (Dindyal, 2006).

4. Recursos didácticos para la enseñanza matemática

El proceso de enseñanza y aprendizaje es complejo, y en particular, en el ámbito escolar no se compone únicamente de los actores principales: el profesor y el alumno. Para mejorar la eficiencia del proceso de enseñanza y aprendizaje, el profesor se apoya en una serie de instrumentos que lo facilitan, interviniendo sobre él. A estos instrumentos se denominan recursos o medios didácticos o de enseñanza (Morales, 2012). Su papel como enfatizador de la comunicación entre el profesor y el alumno permiten considerarlos como un enlace que vincula las palabras (la explicación del profesor, por ejemplo) con la realidad (el concepto que es objeto de aprendizaje), según Edel Navarro y Guerra Ortegón (2010).

La necesidad de la inclusión de otros recursos didácticos en el aula (aparte del libro de texto) nace fundamentalmente de dos circunstancias relacionadas con el aprendizaje (Puig Adam, 1985):

1. Cuanto mayor sea la participación activa del niño en la adquisición de un conocimiento, mayor será su interés por él.
2. Es esencial, desde el punto de vista epistemológico, que el niño actúe para que se forme el pensamiento, lo cual cobra mayor importancia si cabe en el caso de las matemáticas, donde el objeto de estudio son entes abstractos que pueden partir de situaciones reales.

Es importante tener en cuenta que el material didáctico no es solamente un objeto, sino “una organización de recursos que media la expresión de acción entre maestro y alumno” (Castañeda Yáñez, 1979, p. 103). Por tanto, podemos descomponer un recurso didáctico en dos elementos (Padrón, Doderó, Díaz y Aedo, 2005):

1. Contenidos. Los conceptos a cuyo aprendizaje está diseñado para asistir el recurso.
2. Estrategia pedagógica. Consiste en el diseño instruccional del recurso, esto es, la planificación del recurso en términos tanto de apariencia como de funcionalidad que, siguiendo los principios del aprendizaje heredados de las principales teorías sobre el área (como el constructivismo, la teoría del procesamiento de la información, etc), tiene como objetivo maximizar el efecto

que el recurso tiene sobre el aprendizaje (Smith y Ragan, 1999). Un diseño instruccional deficiente resultará en un recurso didáctico pobre, con escasos resultados sobre el aprendizaje del alumno.

Los recursos didácticos incluyen, entre otras, las siguientes funciones (Cacheiro González, 2011; Fernández Amigo, 2008):

- Acercar al alumno al hecho o fenómeno a estudiar
- Suscitar la motivación y el interés en el alumno.
- Proporcionar información y facilitar la comprensión de la misma por el alumno.
- Actuar como guía en el aprendizaje del alumno.
- Permitir la evaluación de conocimientos y capacidades.
- Ejemplificar el contenido que el profesor está exponiendo a través de la palabra hablada.
- Simular entornos para que el alumno observe, explore y experimente.
- Proporcionar entornos que incentiven las facetas expresivas y creativas de los alumnos, incluso a través del manejo y construcción de aparatos.

Una de las funciones más importantes de los recursos didácticos, la de la mejora de la motivación, se consigue especialmente cuando el recurso produce un impacto en el alumno. Este efecto ayuda a que el aprendizaje sea significativo (Ausubel, 1963) y que los contenidos sean atractivos para el alumno (Morales, 2012). Este impacto se puede lograr a través de la estimulación sensorial (como buscan los recursos electrónicos con movimiento y colorido), o bien a través de la novedad que supone para el estudiante.

La clasificación de los recursos didácticos no es una tarea sencilla, dada la heterogeneidad de elementos que los componen. Ante la ausencia de una clasificación universal, muchos autores proponen diferentes formas de catalogar los recursos didácticos.

Por ejemplo, Cacheiro González (2011) propone tres tipos de recursos didácticos: información, comunicación y aprendizaje, aun reconociendo que un mismo recurso puede caer en más de una de las categorías. Por otra parte, Bravo Ramos (2004) propone otra forma de clasificar, dividiendo los recursos didácticos (que considera exclusivamente materiales) en tres grupos:

4. Recursos didácticos para la enseñanza matemática

- Medios de apoyo a la exposición oral, en el que caen todos los medios tradicionales y aquéllos fundamentalmente visuales (pizarra y pizarra digital, transparencias para retroproyector, carteles, diapositivas, presentaciones por ordenador, etc).
- Medios de sustitución o refuerzo de la acción del profesor, que incluye aquellos recursos que tienen la capacidad de comunicar un determinado contenido en su totalidad y que no necesitan de la acción del profesor para ser empleados (libros, apuntes, vídeos educativos y sistemas multimedia, caracterizados estos últimos por la interactividad con el alumno).
- Medios de información continua y a distancia, que hacen uso de las nuevas tecnologías no tanto para transmitir un determinado contenido, sino para mantener informado al alumno sobre cualquier aspecto del curso o asignatura en el que se encuentra. En esta categoría encontramos las páginas web elaboradas para un curso, las videoconferencias, el correo electrónico, los programas informáticos de mensajería instantánea y los sistemas completos de teleformación, también conocidos como plataformas didácticas (Vidal Ledo, Nolla Cao y Diego Olite, 2009), que reúnen todas las funcionalidades anteriores.

Estas clasificaciones no son exhaustivas, pues se centran exclusivamente en los recursos que transmiten información y conocimientos, olvidando facetas importantes en el proceso de aprendizaje como la evaluación de los mismos.

Se pueden proponer otras muchas categorizaciones. Una de ellas es en cuanto a la utilización por parte del alumno. Tendríamos entonces los recursos lúdicos y los académicos. Los lúdicos emplean el juego como catalizador del mensaje del profesor o como facilitador del aprendizaje. Según Mora Sánchez (1995):

El juego es un tipo muy especial de recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas porque dan al estudiante una razón propia para hacer matemáticas y, lo que es más importante, porque la retroalimentación no proviene de las correcciones del profesor, sino de los compañeros y de uno mismo (p. 6).

Los juegos tienen la ventaja de que pueden ser diseñados de forma que el contenido que transmiten se encuentre implícito, permitiendo un aprendizaje que pasa inadvertido para el alumno (como en la propuesta de Fernández Palop, Caballero García y Carretero Cenjor, 2015). En otras situaciones, encontramos juegos

ya existentes que pueden ser utilizados con un fin didáctico, como es el caso del tangram en la enseñanza de las matemáticas (Cuadrado Morales, 2010; Rodríguez y Sarmiento, 2002).

El resto de recursos, que no se implementan en forma de juego, recibirían el nombre de académicos, como por ejemplo los libros de texto, las presentaciones, los exámenes, etc.

Existen otras dos formas de clasificar los recursos didácticos que se pueden tomar en consideración: en cuanto al soporte en que se encuentran y en cuanto a su objetivo (Tabla 5).

Tabla 5
Clasificación de recursos didácticos por soporte y por objetivo

		Por soporte	
		Físico	Virtual
Por objetivo	Explicativo	Libro de texto Libro de educación Artículos científicos	Videos educativos Presentaciones informáticas Páginas web
	Metodológico/ manipulativo	Regletas de Cuisenaire Dominós Tangram	Juegos Modelo de barras GeoGebra

En cuanto al soporte, podemos clasificar los recursos didácticos en dos grupos: los físicos y los virtuales. Los recursos físicos son materiales propiamente dichos que el alumno puede crear o manipular con las manos, incluyéndose entre éstos los más tradicionales: libro de texto, pizarra, cuaderno, etc. Los recursos físicos tienen su origen histórico en la corriente filosófica conocida como empirismo, uno de cuyos defensores en el siglo XVII fue John Locke. Éste ya propuso el uso de dados y otros juguetes con letras escritas para enseñar a los niños el alfabeto (Locke, 1970).

Los materiales didácticos cobran una especial relevancia en el método de enseñanza Montessori, en el que el niño es el verdadero centro del proceso de aprendizaje, artífice de la construcción de su conocimiento. Este método da libertad al niño para que, en un ambiente cuidadosamente organizado y bajo una supervisión adulta estrictamente controlada, manipule los materiales a su disposición y dirija el aprendizaje que logrará de ellos. Aplicar el método Montessori requiere, por lo

tanto, un extenso conocimiento de los materiales didácticos y su uso (Sablić, Rački y Lesandrić, 2015). No obstante, no todos los recursos materiales son tradicionales. La tecnología actual proporciona otras herramientas que no han estado disponibles para los alumnos hasta hace pocas décadas, como las calculadoras y las pizarras digitales (Gallego Gil, Cacheiro González y Dulac, 2009).

Por su parte, el conjunto de recursos virtuales comprende a aquéllos que no tienen un apoyo físico, lo cual incluye a las estrategias conceptuales para favorecer un aprendizaje y resolver problemas. Como ejemplos de este tipo de recursos tendríamos el modelo de resolución de problemas de Polya (1957), implementado frecuentemente en el esquema “identificar la pregunta – encontrar los datos – realizar los cálculos” (Almodóvar Herráiz y Rodríguez Pecharromán, 2009; Almodóvar Herráiz, García Atance, Rodríguez Pecharromán y Pérez Saavedra, 2015; Alonso Garzón, Bernal López, Ferrero de Pablo y Martín Martín, 2015; Arribas Alonso y Román González, 2009; Arribas Alonso, García y Román González, 2015; Ferrero de Pablo, Gaztelu Albero y Martín Martín, 2009; González Sánchez et al., 2015); recursos de ámbito más restringido, como los number bonds (Nugroho, 2010), el modelo de barras (Englard, 2010; Urbano Ruiz, Fernández Bravo y Fernández Palop, 2016a; Urbano Ruiz, Fernández Bravo, et al., 2016b) y, el uso de la historia de las matemáticas como recurso didáctico (Ortiz Fernández, 2008) y otras propuestas como el modelo de torres (Urbano Ruiz, Fernández Palop y Caballero García, 2016). Pero aparte de estrategias, en el grupo de recursos virtuales encontramos otro conjunto que recibe actualmente mucha atención: los recursos basados en las TIC. Mediante su uso, el alumno se involucra más activa y profundamente en el proceso de aprendizaje que simplemente asimilando la información proporcionada por el profesor (Cardoso, Cristiano y Arent, 2009). De hecho, es especialmente en el aprendizaje de las matemáticas donde los recursos didácticos se están convirtiendo en virtuales (Raiteri y Cambini, 2004).

El uso de la tecnología como recurso didáctico, en la forma de calculadoras y ordenadores, puede rastrearse hasta sus inicios en los años setenta, pero por aquel entonces su impacto en la educación era muy pequeño, puesto que su uso se confinaba al cálculo aritmético y al almacenamiento de contenidos (en forma de imágenes y archivos de texto, por ejemplo).

Hoy en día las nuevas tecnologías, en particular los ordenadores y las tablets, tienen mucho que aportar a la enseñanza de las matemáticas, pues al ser dispositivos dotados de pantallas en las que mostrar cualquier contenido, ofrecen un gran poder

de visualización, que es un elemento fundamental en particular en las matemáticas (Macías Ferrer, 2007). Las herramientas informáticas que los profesores tienen a su disposición actualmente, como por ejemplo Cabri o GeoGebra, permiten su integración en el proceso de enseñanza y aprendizaje (previa formación y sensibilización del profesorado en una multitud de aspectos, tanto funcionales como metodológicos) al permitir al alumno manipular visualmente los objetos matemáticos (Fiallo Leal, 2015).

En cuanto a la clasificación por objetivo, distinguimos dos tipos fundamentales de recursos: los explicativos y los metodológicos/manipulativos. La diferencia entre ambos es fundamentalmente el papel que el alumno desempeña en el uso de estos recursos.

Los recursos metodológicos/manipulativos están concebidos para que el estudiante participe activamente, usándolos o manipulándolos. No en vano, ha sido probado repetidamente el efecto positivo que tienen las actividades manipulativas en el aprendizaje (Costa y Dorrío, 2010) y, por ende, en los resultados académicos (Driscoll, 1983; Greabell, 1978; Raphael y Wahlstrom, 1989; Sowell, 1989; Suydam, 1986), así como la estimulación sensitiva, especialmente en edades tempranas, que fomenta el desarrollo cognitivo-motor y que, por tanto, condiciona en gran medida el aprendizaje futuro (Berga Espona, 2014). Encontramos aquí tanto estrategias para el aprendizaje (como el modelo de barras) como juegos e instrumentos, tanto físicos (por ejemplo papel, tijeras y pegamento para construir poliedros) como virtuales (por ejemplo, un juego de ordenador educativo).

Los recursos didácticos manipulativos adquieren pleno sentido al utilizarlos en la educación matemática como parte del esquema concreto-pictórico-abstracto. Este esquema tiene su origen en la idea de que conviene, como paso previo a la comprensión de un concepto abstracto, basar la instrucción del mismo, en primera instancia, en elementos concretos, perceptibles y preferiblemente manipulables por el alumno (Bruner, 1966). Para Bruner, la secuencia de aprendizaje debe seguir tres fases: enactiva, icónica y simbólica, cada una de las cuales hace uso de recursos más abstractos que desembocan en la comprensión del concepto matemático. En la primera fase se utilizan materiales físicos que representan de alguna forma el concepto. En la segunda se utilizan representaciones sobre el papel de esos objetos (un nivel más de abstracción). En la última etapa se llega al uso de la notación matemática para la aplicación del concepto en cuestión.

El esquema enactivo – icónico – abstracto ha sido adoptado prácticamente de forma literal por los responsables de la educación singaporense, los cuales solamente han cambiado el nombre por Concrete – Pictorial – Abstract (concreto – pictórico – abstracto) o CPA (Fang, Lee y Yang, 2011; Hoong, Kin y Pien, 2015). Existen referencias directas al esquema CPA en el currículo de Matemáticas de Educación Primaria (Ministerio de Educación de Singapur, 2006, 2017), exhortando al profesorado a utilizarlo como base metodológica. Asimismo, en el propio currículo se hace referencia al uso de unos recursos manipulativos concretos con el objetivo de proporcionar a los alumnos experiencias educativas enriquecedoras. Algunos de estos materiales son:

- Bloques base 10 o cubos multibase (base-ten sets), que aunque pueden adoptar distintas formas suelen consistir en cubos que simbolizan las unidades, barras que tienen el tamaño de 10 cubos para simbolizar las decenas, placas que tienen el tamaño de 10 barras unidas en forma de cuadrado para simbolizar las centenas y cubos grandes que tienen el tamaño de 10 placas apiladas, los cuales simbolizan las unidades de millar.
- Dinero de juguete (play money). Se puede utilizar, entre otros, para el aprendizaje del uso del dinero y sus unidades, de la notación posicional en los números naturales y de los números decimales.
- Diferentes barajas de cartas con los números o que los simbolizan de varias formas: como puntos (parecido a las fichas de dominó), con dibujos, o con palabras.
- Barajas de cartas con multiplicaciones y divisiones en el anverso y el resultado de la operación en el reverso. Se utilizan para practicar y afianzar el conocimiento de *multiplication facts* y *division facts*.
- Balanzas. Se utilizan para ilustrar el concepto de masa y sus unidades.
- Relojes. Se utilizan fundamentalmente para trabajar el concepto del tiempo, pero también se puede utilizar en el trabajo con múltiplos.
- Jarras y vasos de precipitado con medida. Ayudan a trabajar las unidades de capacidad y de volumen. En el propio currículo se menciona el uso de un recipiente de 10 cm de lado para ilustrar la equivalencia entre un litro y un decímetro cúbico.
- Cubos unidad. También conocidos como cubos Unifix, por el nombre de uno de los fabricantes más famosos de este producto, se utilizan para realizar la primera aproximación física al modelo de barras y también para la construcción de figuras geométricas y el cálculo de su volumen.

Por otra parte, los recursos explicativos se caracterizan por contener información, pero poseen poca capacidad para que el alumno interactúe con ellos. Entre ellos se encontraría el libro de texto como estereotipo de su grupo.

Aunque anteriormente se identificaba en las prácticas de los profesores un abuso del libro de texto como recurso didáctico en el aula (Ballesta Pagán, 1995), en los últimos años la variedad existente de recursos disponibles para el profesorado ha provocado un aumento en la diversidad de recursos utilizados por los docentes para ayudarles en su labor, especialmente de los recursos TIC. No obstante, el hecho de que una gran parte del profesorado es inmigrante digital (frente a los alumnos, que son nativos digitales) supone un obstáculo al empleo de estas herramientas, cuyo uso se ve fuertemente demandado por la sociedad actual y futura, en la que tendrán que desenvolverse los alumnos de hoy (Domingo Coscollola y Fuentes Agustí, 2010). Como resultado, el libro de texto sigue teniendo un papel decisivo en el desarrollo de las clases tanto en España como en el extranjero.

4.1. Los libros de texto como recurso didáctico

El objeto de estudio del presente trabajo de investigación es el libro de texto. Cualquiera que sea la definición utilizada de libro de texto, éste forma parte del cada vez más variado conjunto de elementos conocidos generalmente como recursos (o materiales, o medios) didácticos (o curriculares). Su papel es tan importante y está tan presente en la enseñanza que con mucha frecuencia en la literatura se da por hecho (Mora Sánchez, 1995). Aun con nuevos planteamientos educativos o en procesos de innovación, los materiales didácticos siguen siendo necesarios y los libros de texto (en todo caso nuevos libros de texto) se seguirán utilizando y probablemente seguirán teniendo mucha incidencia (Parcerisa Aran, 1996)

Teniendo en cuenta que constituye un tema de interés central en el presente trabajo de investigación, se hace necesario, por un lado, definir con precisión qué se va a entender por libro de texto, para determinar la amplitud del corpus de análisis, y por otra, analizar el alcance de la influencia de los libros de texto en el aula, de cara a reforzar la importancia de nuestra investigación en aras de explicar el rendimiento matemático de nuestros alumnos.

4.1.1. Aspectos conceptuales. Definición de libro de texto.

Existen multitud de definiciones para el libro de texto, algunas más precisas y otras más globales. Torres Santomé (1994) indica que los libros de texto son aquellos materiales que están diseñados para su uso solamente en aulas y centros de enseñanza, y que “contienen la información que los alumnos y alumnas precisan para poder demostrar que cumplen los requisitos para aprobar una determinada asignatura” (Torres Santomé, 1994, p. 155). Rodríguez Diéguez (1983) lo define como “un material impreso, estructurado, destinado a ser utilizado en un proceso de aprendizaje y de formación concertada” (p. 259).

Otra definición, que a su vez pone de manifiesto la importancia que ya hemos visto que posee el libro de texto en la educación es la siguiente: “El medio de aprendizaje principal, compuesto de texto y/o imágenes, diseñado para producir un determinado conjunto de resultados educativos; tradicionalmente es un libro impreso y encuadernado que incluye ilustraciones e instrucciones para facilitar secuencias de actividades de aprendizaje¹⁴” (UNESCO, 2005).

Algunos autores (Johnsen, 1996; Puget, 1963) distinguen entre libro de texto y libro escolar. La diferencia entre ambos es que el primero está diseñado específicamente para su utilización de acuerdo a las secuencias pedagógicas que se vayan a seguir en el aula. Por tanto, se dirigen a áreas de conocimiento concretas y cursos concretos. En cambio, los libros escolares no están ligados a dichas secuencias pedagógicas, o lo están en mucha menor medida. Por lo tanto, los diccionarios, atlas, enciclopedias, etc. caerían fuera de la definición de libro de texto.

Según Hamilton (1990), el libro de texto no está solamente asociado a unos conocimientos escolares, sino a un sistema de escolarización. Y tan íntima es esta asociación, que es posible inferir, a partir del libro de texto, las características del sistema en el que se utiliza.

14 The core learning medium composed of text and/or images designed to bring about a specific set of educational outcomes; traditionally a printed and bound book including illustrations and instructions for facilitating sequences of learning activities. (Traducción propia)

Se pueden distinguir varios tipos de libros de texto, específicamente en la asignatura de Matemáticas. Siguiendo la clasificación de Dormolen (1986), podemos señalar los siguientes:

- Aquellos libros de texto que solamente contienen problemas y ejercicios. Éstos están ausentes de explicaciones o aclaraciones.
- Aquellos libros de texto que contienen explicaciones, generalizaciones, reglas, etc. en una parte y ejercicios en otra, existiendo una diferenciación estricta y patente entre ambas partes. Tanto este segundo tipo como el primero dejan una gran libertad de elección al profesor sobre cómo utilizarlo y cómo hacer que sus alumnos lo utilicen.
- Por último, quedan aquellos libros de texto en los que la teoría y los ejercicios figuran entremezclados a lo largo de todo el contenido. Para Dormolen estos libros pareciera que fueron creados como si se pretendiera que fuesen a prueba de profesores, pues el libro es como un profesor en sí mismo.

Fernández Palop (2013) lo define como: “[L]ibro, ya sea impreso en papel o en cualquier otro formato, editado con el fin de enseñar Matemáticas en un determinado curso/nivel educativo perteneciente a un plan de estudios” (p. 44).

Una característica importante y que no está presente en las definiciones anteriores, es la de que el texto esté legalmente reconocido (Güemes Artilles, 1994) y, por tanto, tenga generalizado su uso. Esta característica diferencia a los libros de texto de otros libros que, aunque están dirigidos a alumnos, al carecer de esta “oficialidad” no serán tratados como tales.

Teniendo en cuenta todas estas aportaciones en nuestro trabajo de investigación entenderemos al libro de texto de la siguiente manera:

“Libro oficialmente reconocido para ser utilizado en un determinado curso de un determinado ciclo educativo en la enseñanza de Matemáticas, y que consta tanto de contenidos teóricos como de ejercicios y problemas destinados a su realización por parte del alumno”.

4.1.2. Importancia del libro de texto

Según Choppin (1992), “los manuales pueden ser estudiados desde distintos puntos de vista, ya que son a un tiempo producto de consumo, soporte de conocimientos escolares, vectores ideológicos y culturales e instrumentos pedagógicos” (p. 102). La importancia de los libros de texto tanto como soporte de conocimientos escolares como instrumentos pedagógicos queda patente desde la propia cultura escolar. Al estar la educación desarrollada desde una “concepción guttemberguiana del saber” (Massone, Romero y Finocchio, 2014), y a pesar de que ya hace décadas que la información dejó de ser patrimonio exclusivo de la palabra escrita y los medios audiovisuales incluso le arrebataron la hegemonía en este aspecto, la enseñanza sigue siendo renuente a abandonar o siquiera a relegar el libro de texto a un segundo plano. En España, la actividad docente sigue teniendo un fuerte apoyo en el libro de texto (Cabero, Duarte y Barroso, 1989; García Mateos y Caballero García, 2005). La propia UNESCO dispone el libro en un plano principal al afirmar que “es un hecho ampliamente reconocido que los libros y otros materiales educativos juegan un papel principal en el proceso de aprendizaje” (UNESCO, 2005, p. 1).

Parcerisa Aran (1996) nos muestra que el libro de texto tiene un uso muy extendido en el aula. En Estados Unidos, afirma, se estima que tres cuartas partes del tiempo en el aula y nueve décimas partes del tiempo dedicado a los deberes está regido por materiales en soporte de papel. Tales estimaciones corresponden a la etapa de Educación Primaria en Estados Unidos, pero los resultados tendrán buena aplicación también en España.

Las leyes educativas en España han pasado de prescribir los libros que se deben usar en el aula (Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa), previa autorización expresa a las editoriales, a la confección del currículo por parte del profesor de acuerdo a unas pautas determinadas por las administraciones educativas (las Comunidades Autónomas) y a una revisión a posteriori de los materiales producidos por las editoriales (Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación; Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación; Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa).

Varios estudios demuestran que el libro de texto tiene un papel clave en el desarrollo de la clase. Clark y Yinger (1979) descubrieron que los profesores, al buscar ideas para ejercer su labor, se limitan a recogerlas de las fuentes que tienen más próximas, empezando por el libro de texto. Así, en la práctica no es el profesor el que diseña el currículo (Cintas Serrano, 2000), sino que deja esa tarea a las editoriales, de cuya concreción curricular se sirven para ejercer su labor en el aula. Aunque dos reformas educativas han tenido lugar desde la publicación de estas líneas, siguen teniendo el mismo vigor. Así pues, el libro de texto tiene un “papel de mediador entre el currículum pretendido y el real” (Mora Sánchez, 1995) y se convierte en una guía que dirige el curso de la enseñanza en buena parte de las aulas.

Este papel adquiere una fuerza inversamente proporcional a la experiencia del profesor. Como afirma Restrepo (1993), en Colombia los profesores con menor preparación y experiencia tienden a recurrir más al libro como única guía para seguir el curso que los profesores con más experiencia, que lo utilizan sobre todo por su organización del programa pero dejan más de lado los contenidos específicos y la forma en que se exponen. Ahora bien, todos los profesores, independientemente de su experiencia y capacidades, hacen uso de los ejercicios para contribuir al afianzamiento de los conocimientos en los alumnos. Parcerisa Aran (1996) abunda en esta idea:

Se estima que los libros de texto llegan a condicionar de manera importante el tipo de enseñanza que se realiza, ya que muchos enseñantes lo utilizan de manera cerrada, sometiéndose al currículum específico que se refleja en él, tanto en lo que se refiere a los contenidos de aprendizaje como a la manera de enseñarlos (p. 35).

De hecho, una de las críticas que reciben los libros de texto como recurso hegemónico en el aula es que son las editoriales las que seleccionan los contenidos que han de aparecer en ellos (Cabero Almenara, Duarte Hueros y Romero Tena, 1995). Esta selección puede venir condicionada por multitud de factores, y no todos ellos han de ser didácticos o metodológicos, puesto que los intereses políticos e ideológicos podrían tener cabida en ello. Sin embargo, se ha demostrado que, a pesar de la existencia de factores ideológicos en los libros de texto, éstos no ejercen una influencia suprema en los alumnos, que reaccionan con resistencia y cuestionamientos (Fernández Palop y Caballero García, 2017).

La capacidad del libro de texto de afectar a la forma en que el profesor da clase, según Cintas Serrano (2000), supedita la metodología de enseñanza a la actividad

comercial. En lugar de plasmar de alguna manera en sus libros de texto metodologías innovadoras fruto de la investigación, las editoriales prefieren preparar libros cómodos para los profesores en los que la enseñanza se realiza de un modo más bien tradicional. Posiblemente, un libro de texto con un planteamiento metodológico innovador que requiera más trabajo formativo y de continuo al profesor, tendrá poco éxito, aun a pesar de provenir de avaladísimas investigaciones de prestigiosos estudiosos. Un libro de texto de perspectiva tradicional, a la que el profesor está más acostumbrado, lo tiene mucho más fácil para ser elegido. Se potencia, pues, el hecho de que los libros de texto estén confeccionados no tanto para los alumnos, que son quienes los van a utilizar, como para los profesores, que son quienes los van a elegir (Alzate Piedrahita, 1999).

Y es que los intereses comerciales no son asunto baladí. Según un estudio de la Universidad de Santiago de Compostela (Varela Mallou, 2008), el sector editorial genera anualmente un 0,5% del PIB europeo, siendo este porcentaje mayor en el caso de España (0,7%). Además, el peso de los libros de texto fue de un 25,7% del total de ventas del sector editorial en 2007. De hecho, según Vázquez Alberto (2012) “los libros de texto representan el 80% de las ventas de una librería” (p. 15).

Estas cifras no han empeorado en los últimos años. De hecho, según el informe “El sector del libro en España” (Ministerio de Educación Cultura y Deporte y Observatorio de la Lectura y el Libro, 2015), los libros de texto no universitario contribuyeron en 2013 a la facturación total del sector editorial con un 33,3%. Cabe decir además que desde 2010 la aportación del libro de texto no universitario no ha hecho más que crecer. Además, los ingresos de las editoriales muy grandes dependen en una medida todavía mayor de los libros de texto, los cuales alcanzan el 48% de la facturación total de las mismas.

Es notable que el libro de texto escrito retenga la importancia económica de décadas anteriores, a pesar de la entrada del libro electrónico en los últimos años. En este subsector, el libro de texto ha tenido un fuerte aumento en lo que llevamos de década, al pasar de un 0,7% de la facturación total en 2009 al 29,2% en 2013 (es decir, en 2013, tres de cada diez libros electrónicos vendidos fueron de texto). Estos números, sin embargo, reflejan una realidad muy por debajo del éxito que se esperaba del libro electrónico, pues para el curso 2014-2015 su impacto en el negocio editorial solamente alcanzó el 3,2%.

Visto el peso económico del sector del libro de texto, se concluye que no es que muchos libros de texto tengan determinadas características porque es lo mejor para los alumnos, sino porque es lo mejor para su propia perpetuidad.

La influencia de los poderes políticos y comerciales y de las diferentes ideologías no son la única crítica que existe sobre los libros de texto. Cabero *et al.* (1995) advierten que el libro de texto, cuando se usa para sustituir al profesor, previene el uso de metodologías favorecedoras del aprendizaje al basarse básicamente en la repetición y la memoria. Por la misma razón, al no favorecer la experimentación por parte del alumno, se merma su espíritu crítico.

A pesar de las críticas que pueden recibir los libros de texto, Vélez, Schiefelbein y Valenzuela (1995) recopilaron una serie de estudios sobre la etapa de Educación Primaria en América latina para extraer conclusiones sobre ellos. De un total de 17 estudios que tenían en cuenta la disponibilidad de libros de texto y material de lectura en el aula, en 13 encontraron una relación positiva entre esta disponibilidad y el rendimiento de los alumnos, y en los cuatro restantes no encontraron relación. Ninguno de los 17 presentó una relación negativa entre ambas variables. Aunque todos los trabajos tenían un ámbito geográfico concreto, América latina, éste es lo suficientemente amplio como para sospechar la universalidad de los beneficios del libro de texto en el aula. A conclusiones parecidas llegaron Gaviria, Martínez-Arias y Castro (2004):

Un tercer factor es la utilización del libro de texto por parte del profesor para la exposición de los contenidos. El uso de un material estructurado favorece claramente el aprendizaje por parte de los alumnos. Carecemos de datos que justifiquen la no utilización de libros de texto, pero no parece descabellado achacarlo a la falta de presupuesto familiar para su compra (p. 21).

El uso del libro de texto en el aula, a pesar de que pueda resultar beneficioso, sigue siendo muy tradicional, pues no se suele utilizar de forma innovadora. Como indica Campanario (2001), los usos más frecuentes del libro de texto por parte del profesor son, en orden decreciente, fuente de información para alumnos y profesores, fuente de ejercicios y tareas de clase y fuente de preguntas y ejercicios de evaluación.

Aun así, el Informe Cockcroft (1985) señala que “ningún libro de texto, por bueno que sea, será un instrumento de validez universal; siempre habrá que emprender actividades adicionales de índole muy diversa” (p. 114) . Y es que el libro de texto no puede sustituir al profesor en ningún caso, aunque la tendencia general

sea que el libro dirija de algún modo la actuación del docente. El caso extremo de esa situación, señalan Monterrubio Pérez y Ortega del Rincón (2011), es lo que se da a conocer como “descualificación profesional”, esto es, la idea que transmiten algunos manuales de que no importan las aptitudes del profesor porque con esos materiales cualquiera puede dar clase. Cabero Almenara *et al.* (1995) también advierten de esta situación, en la que la responsabilidad del rendimiento de los alumnos y de los resultados de la enseñanza se transfiere del profesor al libro de texto. Al profesor le bastaría con saber cómo tratar a los alumnos y cómo reproducir textos.

Por otra parte, las cada vez más preponderantes nuevas tecnologías, en particular internet, tampoco pueden sustituir al libro de texto. Umberto Eco (2016) reflexiona sobre la posibilidad de que el libro de texto desaparezca ante la inmensa cantidad de datos disponible en internet, llegando a la conclusión de que el libro de texto no es solamente información: es información seleccionada, filtrada. Ante la avalancha de datos y opiniones al alcance del niño, es necesario que la escuela le enseñe a filtrar lo relevante de lo irrelevante, lo veraz de lo falso, lo apto de lo inapropiado. Y ahí el libro de texto tiene un importante papel.

De hecho, en un mundo cada vez más digitalizado, es plausible que el libro de texto físico vea su continuidad amenazada por la irrupción del libro electrónico. Ante las tres posibilidades en el horizonte, a saber: desaparición del libro impreso, la coexistencia de libro impreso y de libro electrónico y la desaparición de libro electrónico, Chartier (2001) ignora completamente la última y defiende la coexistencia de ambos medios frente a una hegemonía del formato electrónico. Chartier afirma que, en ese caso, solamente cabría lamentarse por la pérdida de la cultura escrita o arrojarse de forma imprudente y precipitada a las nuevas tecnologías. Aun así, los libros de texto como tales, independientemente de su formato, “continuarán siendo muy importantes y de uso frecuente en las aulas” (Romero, 2012). Se seguirán utilizando y teniendo gran incidencia (Parcerisa Aran, 1996), como decíamos al principio de este capítulo.

Es, pues, justo otorgar al libro de texto, ya sea físico o electrónico, en base a su uso en el aula y a las propiedades con que ha sido concebido, carácter de factor de enorme influencia en el devenir educativo de los centros que lo utilizan.

Sin embargo, aunque no es común el cuestionamiento de este recurso educativo debido a la confianza que normalmente se deposita en ellos, sí es legítimo preguntarse: ¿Es siempre correcto el contenido que aparece en los libros de texto de Matemáticas?

Este interrogante no llevó a plantearnos si el libro de texto contiene errores y si estos errores pueden de alguna manera tener alguna repercusión en los procesos de enseñanza-aprendizaje que es objeto del presente trabajo de investigación.

4.1.3. Errores en los libros de texto

Dada la importancia que tienen los libros de texto entre todos los recursos didácticos, se hace necesario entrar a considerar la corrección de sus contenidos. De hecho, dada su función es deseable que todo aquello que contiene no contenga errores.

Antes de valorar o siquiera determinar la presencia de errores en un libro de texto, es imprescindible fijar una definición de error válida para nuestro estudio. Una errata, una falta de ortografía y una fecha incorrecta son tres errores de distinta naturaleza e índole que bien pueden aparecer en un libro de texto, pero no tienen las mismas consecuencias ni la misma importancia de cara al aprendizaje.

La Real Academia Española (2014) define “error” de la siguiente forma:

1. Concepto equivocado o juicio falso.
2. Acción desacertada o equivocada.
3. Cosa hecha erradamente.
4. Der. Vicio del consentimiento causado por equivocación de buena fe, que anula el acto jurídico si afecta a lo esencial de él o de su objeto.
5. Fís. y Mat. Diferencia entre el valor medido o calculado y el real.

Las tres primeras acepciones se ajustan a las definiciones intuitivas que un hispanohablante atribuye normalmente a la palabra “error”, mientras que las dos últimas pertenecen al vocabulario técnico del derecho y de las ciencias. De un modo preliminar, hasta llegar a una definición precisa del error, podemos referirnos a este concepto, de acuerdo a como se utiliza en el presente estudio, utilizando la primera acepción, en particular “concepto equivocado”.

La literatura científica, en cuanto al tratamiento de errores en educación, se centra casi exclusivamente en el estudio de los errores que los alumnos cometen, en

su origen, en su clasificación, en sus frecuencias, en cómo evitarlos, etc. (véanse, por ejemplo, Alber-Morgan et al., 2007; Davis, 1984; Fernández Bravo, 2011; Fuchs et al., 2008; Raghubar et al., 2009; Schochet y Chiang, 2010).

Otra parte importante de la atención dedicada a los errores matemáticos se centra en el error como término estadístico (al que se refiere la Real Academia Española en la cuarta acepción de “error” en su diccionario) o como integrante ineludible de la aplicación de métodos numéricos (para el cálculo de integrales definidas, de polinomios de interpolación, de ecuaciones diferenciales, etc).

Cuando se trata del error matemático, existe también un enfoque más teórico, más filosófico que busca desentrañar la naturaleza de la verdad matemática y su relación con el error (por ejemplo, Benacerraf, 1973; Daly y Liggins, 2010).

4.1.3.1. La investigación del error en los libros de texto

La investigación de los errores contenidos en los libros de texto es relativamente escasa. La literatura existente, sin embargo, presenta un panorama en el que dichos errores (más allá de las erratas) aparentemente están presentes en todas las disciplinas científicas, tanto en ciencias sociales como en ciencias (Barrantes, López y Fernández, 2015; Barrantes López y Zapata Esteves, 2008; Blanco Nieto, Caballero Carrasco, Piedehierro, Guerrero Barona y Gómez del Amo, 2010; Bland y Altman, 1988; Campanario, 2006; Chang, Choi y Lim, 2014; Noh y Jang, 2015; Favale y Bondani, 2014; Franzolin y Bizzo, 2015; Hubbard y Bayarri, 2003; Jensen, 2012; Jeon, Kim y OhSookhyun, 2010; Kang, Kim y Lim, 2005; Laugwitz, 1987; Medina y Cudmani, 2016; Park, Hong y Sin, 2012; Park y Jung, 2010; Pichorim y Abatti, 2013; Uhlik, 2004; Vella, 1995; Vinner y Hershkowitz, 1983; Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen y Doorman, 2015).

Acotando el campo que nos interesa para este estudio a las ciencias, hemos encontrado, en el caso particular de la biología, que los avances científicos y la corrección de teorías (no tan) antiguas es fuente de error en libros de texto. Así, por ejemplo, Franzolin y Bizzo (2015) estudiaron las diferencias existentes entre los contenidos sobre genética en libros de Secundaria con el conocimiento académico existente, cuánto se aproximaba y cuánto se desviaba. Asimismo, midieron la

presencia de dos conceptos antagónicos: laxitud (desviación de los contenidos frente al conocimiento académico con el objetivo de hacer accesible el contenido) y rigor (ajuste de los contenidos frente al conocimiento académico para presentar un conocimiento correcto). Como resultado, determinaron que las desviaciones presentes no se podían clasificar como errores conceptuales y que no estaban necesariamente relacionadas con los conceptos mismos. Un poco menos de permisividad mostró Vella (1995), que diferenciaba dos tipos de error: errores de omisión (de palabras, frases u oraciones), los cuales eran admisibles hasta cierto punto, y errores de comisión (es decir, descripciones incorrectas o malinterpretaciones de hechos científicos establecidos), los cuales bajo ningún concepto se podían permitir en un libro de texto, sobre el cual pesaba la legítima exigencia por parte de sus destinatarios (alumnos y profesores) de escrupulosa corrección.

En física, química y ciencias de la Tierra, los errores introducidos en los libros de texto pueden venir representados por una metodología incorrecta que se presenta al alumno, como en el caso de la medición del punto de ebullición en libros de 7.º grado de Corea del Sur puesto de manifiesto por Eul Noh y Nak Han Jang (2015). Relacionado con lo anterior, Park y Jung (2010) analizaron una serie de ilustraciones en libros de texto de Química y definieron como errores aquellas situaciones representadas en las que no se seguían las normas de seguridad o se manejaba instrumental incorrectamente. Los autores consideraban que el error se presentaba en el proceso de realización de las ilustraciones, en el que deberían participar expertos. En ocasiones, la presencia de errores no es un hecho aislado, sino la tónica general. King (2010), al realizar un análisis sobre los temas pertenecientes a ciencias de la Tierra en 51 libros ingleses y galeses de Ciencias, encontró una media de un error por cada página y media.

En muchas ocasiones, los errores estudiados se refieren a conceptos muy concretos. Jensen (2012) habla sobre algunos errores comunes asociados al concepto de cargas iónicas en libros de texto de química. Pichorim y Abatti (2013) estudian los errores en la representación del coeficiente de acoplamiento en libros de ingeniería eléctrica y electrónica. Medina y Cudmani (2016) consideran el error sistemático asociado a las simplificaciones usuales (ausencia de rozamiento fundamentalmente) para determinar cuáles son más factibles en aras de la simplificación en la enseñanza, es decir, en la búsqueda del equilibrio entre la realidad (más compleja pero más exacta) y la simplificación de la misma (más simple pero menos exacta).

En otros casos, el estudio de los errores se realiza bajo el prisma del efecto que éstos pueden tener sobre la educación. Por ejemplo, Campanario (2006) reconoce la existencia de errores en libros de Física, pero los utiliza de una forma positiva como instrumentos para fines educativos. Por otra parte, Jeon, Kim y Oh Sookhyun (2010) encuentran, mediante la técnica del análisis de contenido, falacias y explicaciones faltas de claridad en un libro de Ciencias de educación especial. Concluyen que estas incorrecciones podrían suponer un obstáculo para el aprendizaje. En una línea parecida, Favale y Bondani (2014) muestran cómo ciertos errores conceptuales en alumnos de cursos de óptica en Educación Secundaria pueden estar relacionados con explicaciones que pueden dar lugar a error en los libros de texto. Frecuentemente, de hecho, éstas se encuentran en los dibujos y diagramas explicativos que acompañan al texto. Los autores sugieren una forma de corregir estas representaciones erróneas, pero no reflexionan sobre el origen del problema ni sobre cómo hacerle frente al considerar toda la muestra.

4.2. Errores en los libros de texto.

La asignatura de Matemáticas recibe una significativa atención, dada la universalmente conocida dificultad que entraña a los alumnos (Blanco Nieto et al., 2010). En los libros de texto de esta asignatura también se han encontrado errores.

Es bien conocido el caso de los errores existentes en los libros de texto del matemático francés Augustin-Louis Cauchy. En estos libros, ciertos teoremas relacionados con el análisis están formulados incorrectamente. Sin embargo, se ha demostrado (Laugwitz, 1987) que esa incorrección formal desaparece cuando se asume que las funciones que participan en ellos son continuas. Como veremos más adelante, se trata de un claro caso de error de omisión por falta de premisas. Sin embargo, el estudio antes citado sugiere que la condición de continuidad se asume tácitamente, en un intento de equilibrar el rigor y la simplicidad (aspecto que podemos comprobar acompaña a la confección de libros de texto desde antaño).

En algunas investigaciones se parte de los errores que cometen los alumnos, tratando de relacionarlos directamente con las características de los libros que se han utilizado. Así, en un estudio realizado en Indonesia (Wijaya et al., 2015) se sugiere una posible relación entre los errores cometidos por los alumnos y la falta

de oportunidades de aprendizaje que ofrecen los libros de texto. Esta medida de oportunidades de aprendizaje se realizó de acuerdo a tres características: el contexto (real o abstracto), la cantidad de información (insuficiente, suficiente, superflua) y los requisitos cognitivos de la tarea (de menor a mayor: rutinas, tareas de conexión y tareas de reflexión). Aunque no se mencionan los errores propiamente dichos en el libro de texto, sí se pone de manifiesto en este trabajo que ciertas características de ellos pueden relacionarse con las dificultades en el aprendizaje encontradas en algunos de los alumnos que los han usado.

En la misma línea, en otro trabajo (Park et al., 2012) se demuestra que las dificultades que se encuentran los alumnos de Educación Secundaria al construir una imagen conceptual de la continuidad de funciones se encuentra en la definición de continuidad que figura en los libros de texto que utilizan.

Un pequeño paso más allá lo efectúa el trabajo de Barrantes, López y Fernández (2015), en el que se analizan las ilustraciones empleadas en los temas de geometría de cuatro libros de 1.º curso de ESO en Extremadura. En este trabajo se muestra la existencia de distractores de orientación y de estructuración. Estos conceptos, acuñados por Vinner y Hershkowitz (1983), hacen referencia a determinadas propiedades que poseen las imágenes que el alumno incorpora a sus esquemas conceptuales como asociadas a un determinado concepto, cuando en realidad no tienen nada que ver con él. Un ejemplo claro de distractor de orientación se encuentra en el paralelismo con los bordes del libro de texto que se puede encontrar en imágenes que representan rectas paralelas o alturas de triángulos (Barrantes et al., 2015). La verticalidad u horizontalidad no caracterizan ni a las rectas paralelas ni a las alturas de los triángulos, pero el alumno puede asociar unos elementos con otros a partir de las imágenes. Sin llegar a calificar estos elementos como errores, los autores sí llegan a considerar inadecuadas algunas representaciones gráficas o si existe la posibilidad de que lleven a confusión, convirtiéndose, por tanto, en obstáculos para el aprendizaje.

También existen, no obstante, investigaciones que reconocen la existencia de errores en libros de texto de Matemáticas. Tal es el caso de los libros de texto de Educación Primaria en los que, al explicar la división, no excluyen el 0 como divisor. Esta situación puede provocar situaciones difíciles de manejar cuando los alumnos preguntan por la división por 0 (Chang et al., 2014). De hecho, el tratamiento de la división por 0 no es el único cálculo con 0 que se trata de forma inadecuada, existiendo

una falta de situaciones de operaciones con 0 y de divisiones en las que el cociente tiene alguna cifra intermedia 0 que puede provocar errores en los alumnos. También en el caso de la estadística, donde la existencia de errores puede afectar fuertemente a otras disciplinas que se sirven de ella para el estudio de datos. Por ejemplo, Bland y Altman (1988) alertan sobre la existencia de estos errores y recomiendan siempre asesorarse por un experto en estadística. Por su parte, Hubbard y Bayarri (2003) no solamente constatan la existencia de algunos de esos errores, sino que explican el origen de los mismos (la mezcla de las corrientes de Fisher y de Neyman-Pearson) y ofrecen una solución a la confusión.

El análisis de contenido ha sido aplicado, aunque en contadas ocasiones, en la búsqueda de errores en los libros de texto. Por ejemplo, Kang, Kim y Lim (2005) consideran que las ilustraciones son los elementos más importantes de un libro de texto, y por tanto, sus creadores deben prestar especial cuidado en su presentación, para que se ajuste a las características del desarrollo cognitivo del alumno al que se dirigen y promuevan en él el aprendizaje significativo. Por ello, aunque centrando su atención en el segundo curso de Educación Primaria, analizaron las diferencias existentes entre las ilustraciones (uso, tamaño, posición, etc) de los libros de 2.º, 4.º y 6.º cursos de Educación Primaria en Corea del Sur, prestando especial atención a los errores presentes en los libros de segundo. Los autores consideraron 4 categorías de error: errores de expresión matemática, errores de aplicación a la vida real, errores de representación y errores de selección de material. En total se encontraron 443 errores, los cuales pusieron en alerta a los autores del estudio sobre la calidad de los elementos visuales de los libros de texto, en un momento en el que cada vez son más utilizados como recurso didáctico.

Siendo el último estudio el que más se acerca al análisis que este trabajo ha pretendido efectuar, el alcance de los estudios sobre errores matemáticos en libros de texto se ha centrado en parcelas muy concretas (un determinado tema o área de estudio, o un subconjunto de los componentes de que consta un libro de texto), y en muy pocos casos ofreciendo una categorización exhaustiva y fundamentada de los errores. En la revisión de la literatura solamente hemos encontrado como precedente el estudio que Fernández Palop (2013) realizó sobre errores matemáticos en los libros de texto de 6.º curso de Educación Primaria, el cual hemos utilizado como modelo en nuestro análisis de los libros de texto de ese mismo curso y etapa educativa en Singapur.

Fijar nuestra atención en los libros de Singapur está plenamente justificado, de acuerdo a sus brillantes resultados en las pruebas internacionales más importantes (PISA y TIMSS), en contraste con los modestos resultados de los alumnos españoles. Además, esta elección viene suscitada por una serie de preguntas que surgen de forma natural, como parte del proceso de problematización del que nos habla Rodríguez Sosa (2010). ¿Puede la calidad de los contenidos expuestos en los libros de texto, entendida como la ausencia de errores matemáticos, ser parte de la razón de que existan tales diferencias en los resultados? ¿Es la existencia de errores una consecuencia de la propia elaboración de libros de texto, especialmente en los destinados a alumnos de corta edad? ¿Se cometen los mismos tipos de errores en distintos países? La respuesta a estas preguntas se convirtió en un reto que dio origen a la parte empírica de la investigación.

4.3. Resumen y conclusiones

En el proceso de enseñanza-aprendizaje intervienen importantes factores, aparte del profesor y el alumno. Entre esos factores encontramos a los recursos educativos, elementos que de extraordinariamente diversas formas pueden contribuir a una mejora en el aprendizaje (Morales, 2012).

Los libros de texto ocupan un lugar destacado entre los recursos didácticos, tanto por su importancia (UNESCO, 2005) como por su uso extendido (Parcerisa Aran, 1996). Desafortunadamente, esta importancia los hace susceptibles a influencias políticas, económicas e ideológicas (Alzate Piedrahita, 1999; Cabero Almenara et al., 1995).

La información contenida en los libros de texto, dado que se presupone que son fuente de conocimiento, debe ser fiel a la realidad (o por lo menos coherente con lo que se conoce actualmente). Sin embargo, los libros de texto están hechos por personas y éstas son falibles, por lo que no están exentos de contener imprecisiones, en el mejor de los casos, o información que entra en contradicción con el saber científico actual, en el peor de ellos. Esta presencia de errores ha sido plasmada en investigaciones realizadas sobre libros de texto de todas las áreas y de distintas etapas educativas. Si bien la literatura al respecto es escasa, como ha podido comprobarse con la lectura de este capítulo, en casi todos los casos la motivación de estas investigaciones

fue la prevención del efecto que pueda provocar en los estudiantes la exposición a conocimiento incorrecto, pero no se ha relacionado en ninguna de ellas la relación que puede existir entre la presencia o ausencia de errores en los libros de texto y una posible explicación del nivel de desempeño en pruebas de evaluación internacional de los alumnos que los utilizan, que dio origen a la realización del presente estudio, habida cuenta de nuestros antecedentes en el estudio de los libros de texto en la Comunidad de Madrid.

PARTE III
EMPÍRICA

5. Antecedentes

Como sabemos, los diferentes países tienen innumerables características que hacen únicos sus sistemas educativos. Aunque establecer criterios para clasificar a todos los países en cuanto a la bondad o calidad de la educación que poseen es difícil, por la disparidad de criterios que pudieran manejarse y discutirse en el cumplimiento de este objetivo, la evaluación internacional pone de manifiesto las diferencias existentes entre ellos y trata de aproximarse al establecimiento de tal clasificación. Teniendo en cuenta esta consideración y esta fuente de datos que hemos usado como referencia, hemos comprobado que, edición tras edición de varios programas de evaluación internacional, Singapur obtiene resultados consistentemente brillantes, al contrario que España, que se mantiene en la media o significativamente por debajo de ésta en la mayoría de las ocasiones.

Esto nos ha llevado a preguntarnos: ¿cuál es el secreto que sitúa a Singapur en este lugar destacado y cuáles son las razones que lo mantienen en esta posición de manera continua a lo largo de los años? Aunque la respuesta a esta pregunta queda, por su complejidad, muy lejos del alcance de este trabajo, nos hemos aproximado a una pequeña parte de la realidad educativa de Singapur desde el punto de vista social, histórico, cultural y por supuesto educativo, a través de su currículo y de sus libros de Matemáticas como recursos didácticos más significativos, con la intención de encontrar pistas que puedan indicar dónde pueden estar las claves (si es que hay más de una) del extraordinario rendimiento que alcanzan los estudiantes singapurenses en matemáticas.

En concreto, dada la importancia del libro de texto en la educación hoy en día por la frecuencia de su uso en los procesos de enseñanza-aprendizaje, hemos puesto nuestra atención en los antecedentes de nuestro equipo de investigación que se centraron en buscar la existencia de errores en los libros de texto de Matemáticas en Educación Primaria de la Comunidad de Madrid, nos hemos preguntado si es un hecho aislado y si los libros utilizados en Singapur también contienen errores o, por el contrario, carecen de ellos, y eso se convierte en un aspecto que puede explicar sus elevados resultados en la evaluación internacional.

A lo largo de nuestra fundamentación teórica hemos podido comprobar que la literatura existente sobre el error matemático es escasa. El reducido número de referencias existente se centra sobre todo al campo de las ciencias (biología, geología, física, química y por supuesto matemáticas), al análisis de errores en áreas concretas (como geometría o estadística), al recuento de errores y pocas veces reparan en su clasificación y significado aplicado a la enseñanza-aprendizaje de la matemática (Barrantes et al., 2015; Bland y Altman, 1988; Hubbard y Bayarri, 2003).

De entre las escasas investigaciones que han abordado la tarea de clasificar los distintos tipos de errores, podemos mencionar la de Vella (1995), que solamente distingue dos categorías: omisión y comisión.

Otros autores como Kang, Kim y Lim (2005) hicieron uso del análisis de contenido para la búsqueda de errores en las ilustraciones de los libros de texto de 2.º, 4.º y 6.º cursos de Educación Primaria en Corea del Sur, e identificaron un total de 443 errores, los cuales clasificaron en errores de expresión matemática, errores de desfase temporal, errores de presentación y errores de selección errónea del material representado.

Ninguno de estos referentes externos a nuestro estudio aportaron una clasificación exhaustiva del error, y el segundo de ellos se centró exclusivamente en las ilustraciones contenidas en los libros de texto.

Realmente el antecedente más destacado de este estudio ha estado en la investigación de Fernández Palop (2013), realizada sobre los libros de texto de 6.º. Curso de Educación Primaria, pertenecientes a cuatro editoriales, seleccionados por ser utilizados en el 90% de los centros de la Comunidad de Madrid, y que hemos utilizado tanto por la experiencia que aporta como por la exhaustividad de su análisis en el tratamiento del mismo problema en un contexto español.

6. Planteamiento del problema

Muchos estudios ponen de manifiesto la importancia que tiene el libro de texto en el aula y el poder que alberga para definir el orden, el tiempo e incluso la forma en que se van a impartir los distintos contenidos del currículo (Cintas Serrano, 2000; Clark y Yinger, 1979; Mora Sánchez, 1995; Parcerisa Aran, 1996; Restrepo, 1993; UNESCO, 2005).

Sabemos, por la literatura consultada, que los libros de texto incluyen errores entre sus contenidos (Barrantes et al., 2015; Barrantes López y Zapata Esteves, 2008; Blanco Nieto et al., 2010; Bland y Altman, 1988; Campanario, 2006; Chang et al., 2014; Noh y Jang, 2015; Favale y Bondani, 2014; Fernández Palop, 2013; Franzolin y Bizzo, 2015; Hubbard y Bayarri, 2003; Jensen, 2012; Jeon et al., 2010; Kang et al., 2005; Laugwitz, 1987; Medina y Cudmani, 2016; Park et al., 2012; Park y Jung, 2010; Pichorim y Abatti, 2013; Uhlik, 2004; Vella, 1995; Vinner y Hershkowitz, 1983; Wijaya et al., 2015).

Sin embargo, la escasez de investigación exhaustiva y sistemática del error, habida cuenta de lo importante que es el rigor en las disciplinas científicas, la actitud que muchos alumnos muestran ante la matemática por considerarla una “asignatura difícil” y la necesidad de encontrar solución a los problemas de rendimiento en esta materia que presentan nuestros alumnos, encontrando en el error uno de los factores que puedan determinarlo, marcó el objetivo de nuestra investigación.

Nos centramos en la etapa de Primaria, por varios motivos. El primero de ellos, porque es al final de dicha etapa y al principio de Secundaria cuando el perfil afectivo del alumno frente a las matemáticas cambia negativamente (Hidalgo Alonso, Maroto Sáez y Palacios Picos, 2005). El segundo, porque estudiando esta etapa se pueden establecer paralelismos con los resultados del estudio previo de este mismo tema en la Comunidad de Madrid (Fernández Palop, 2013). Y, en particular, estudiamos el sexto curso de Primaria debido a que es precisamente en ese curso en el que todos los conceptos matemáticos pertenecientes a la etapa son revisados y estudiados para afianzar las bases matemáticas que los alumnos necesitarán para el paso de etapa educativa.

De entre todos los países del mundo en los que puede resultar interesante estudiar la presencia de errores en sus libros de texto, la elección para elaborar este trabajo ha recaído sobre Singapur. Los alumnos de Singapur han tenido mejores resultados que la mayoría de los países (si es que ha habido alguno con mejores resultados) en las pruebas de evaluación educativa internacional más prestigiosas: PISA y TIMSS (Artlet et al., 2003; Martin et al., 2008a; Ina V. S. Mullis et al., 2012; Mullis et al., 2000; Mullis, Martin, González Nagel, et al., 2004; OCDE, 2004, 2008, 2010b, 2013). Nos preguntamos ¿tendrán errores sus libros de texto? Si sus libros de texto no tienen errores, ¿podría estar ahí alguna de las claves de su éxito?

6.1. Pregunta de investigación

La pregunta de investigación quedó redactada de la siguiente forma: “¿Existen errores matemáticos en los libros de texto de matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria en modalidad Standard recomendados por el Ministerio de Educación de Singapur para el periodo 2009-2017? Si existen, ¿dónde se localizan y de qué tipo son?”

Para sostener esta pregunta son precisas algunas definiciones. En primer lugar, para definir libro de texto haremos uso de la definición lanzada anteriormente, elaborada en y para este estudio:

“Libro de texto es un libro oficialmente reconocido para ser utilizado en un determinado curso de un determinado ciclo educativo en la enseñanza de Matemáticas, y que consta tanto de contenidos teóricos como de ejercicios y problemas destinados a su realización por parte del alumno”.

El curso y ciclo educativo en el que nos hemos centrado ha sido 6.º curso de Primaria, en su modalidad Standard. Cabe recordar la existencia, en la actualidad, de dos corrientes (*streams*) en los dos últimos cursos de Primaria, llamadas Foundation y Standard. La primera de ellas va dirigida a los alumnos que obtienen peores resultados en Matemáticas, y la segunda para todos los demás alumnos.

Los contextos temporal y geográfico de la pregunta nos señalan los libros utilizados en Singapur en el instante de confección de este trabajo. Teniendo siempre presentes los criterios de homogeneidad, exhaustividad, representatividad y pertinencia, los libros seleccionados han sido todos los presentes en la lista (pública) de libros aprobados por el Ministerio de Educación de Singapur, cuatro en total.

El segundo concepto clave en la pregunta de investigación es el de error. Para identificar un error en una disciplina, es necesario tener en mente una definición de dicha disciplina. Solamente así podremos determinar qué es aquello que transgrede a la definición, aunque esto no signifique necesariamente que se transgreda la propia disciplina. Esto es particularmente complejo en el caso de las matemáticas, cuya definición, aun la intuitiva, ha ido cambiando desde que empezó a haber personas que decidiesen cultivarla.

Desde la época de Aristóteles y hasta el siglo XVIII, se solía afirmar que las matemáticas son “la ciencia de las cantidades” (Franklin, 2009). Esta definición aparentemente choca con la complejidad del concepto “Cosas matemáticas”, estudiado por el propio Aristóteles (1970), cuya inherente abstracción pareció perderse en la aritmética y la geometría (más “mundanas”) hasta la llegada de ilustres matemáticos como Gauss, Cauchy, Weierstrass y otros en el siglo XIX. Fue entonces cuando se extendió la noción de número, hubo un auge del álgebra simbólica y se empezaron a construir formalmente entidades matemáticas claramente alejadas de la idea de “cantidad” (Stenlund, 2014).

Para el matemático del siglo XIX Benjamin Peirce (1881), “la matemática es la ciencia que señala las conclusiones necesarias¹⁵” (p. 97), lo cual introduce la lógica y el razonamiento de forma expresa en la definición de matemáticas. Ahondando en la idea de la lógica, encontramos la definición de Borel (1962):

[L]a matemática aparece, de manera cada vez más clara, como la ciencia que estudia las relaciones entre ciertos entes abstractos definidos de manera arbitraria, con la única condición de que estas definiciones no conduzcan a una contradicción (p. 25).

15 Mathematics is the science which draws necessary conclusions. (Traducción propia)

Es esta definición la que nos indica que hacer matemáticas implica usar una lógica correcta. La contradicción, pues cae fuera de los límites de la matemática. Pudiera pensarse, pues, que en matemáticas no existe el error, pero debemos recordar que, como toda ciencia, se trata de una actividad humana y los seres humanos somos propensos a equivocarnos:

Wittgenstein decía que las matemáticas se podían caracterizar como la disciplina en la que es posible cometer errores (en realidad, no solamente es posible, es inevitable). La propia noción de error presupone que existe lo correcto y lo incorrecto independientemente de nuestra opinión, que es lo que hace matemáticas a las matemáticas. Los matemáticos cometemos errores, incluso errores importantes, incluso en artículos famosos que han circulado durante años¹⁶ (Hersh, 1998, p. 43).

Así pues, el error en matemáticas vendría dado por una conclusión incorrecta o una contradicción en un razonamiento a partir de otros principios anteriores, considerados como ciertos ya por ser axiomáticos o por estar ya probados formalmente. Todas estas ideas desembocan en la siguiente definición de error:

Se consideró que en un libro de texto de matemáticas había un error matemático si existía contradicción entre lo que el libro de texto afirmaba o negaba como verdadero y lo que afirmaba o negaba la matemática, o bien, si lo que el libro de texto afirmaba o negaba como verdadero, conducía a una contradicción con lo que afirmaba o negaba la matemática. (Fernández Palop, 2013, p. 119)

Los enunciados de los ejercicios, sin embargo, son órdenes y los órdenes no son proposiciones susceptibles de entrar en contradicción con las afirmaciones de la matemática. En ese campo particular es interesante la siguiente consideración: “Cometemos error científico ante una pregunta, cuando hay discrepancia entre: lo que la ciencia espera por respuesta y, la respuesta que nosotros damos” (Fernández Bravo, 2011, p. 185).

Así pues, cuando la respuesta dada a un ejercicio no es la que la matemática daría, ya sea por falta de datos, respuestas incompleta (cuando se dan), o por cualquier otra razón, se considerará que el ejercicio contiene un error.

16 Wittgenstein said that mathematics could be characterized as the subject where it's possible to make mistakes (actually, it's not just possible, it's inevitable). The very notion of a mistake presupposes that there is right and wrong independent of what we think, which is what makes mathematics mathematics. We mathematicians make mistakes, even important ones, even in famous papers that have been around for years. (Traducción propia)

6.2. Objetivos de la investigación

6.2.1. Objetivo general

El objetivo general planteado para esta investigación es: identificar la existencia o no del error y, en el caso de que exista, caracterizar los errores matemáticos que se encuentren en los libros de texto de Matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria de la modalidad Standard aprobados por el Ministerio de Educación de Singapur para el periodo 2009-2017.

6.2.2. Objetivos específicos

El objetivo general se descompone en cuatro objetivos específicos:

1. Identificar la presencia o ausencia de error en los libros de texto de Matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria de la modalidad Standard aprobados por el Ministerio de Educación de Singapur para el periodo 2009-2017.
2. Describir la distribución de los posibles errores matemáticos que puedan encontrarse en los libros de texto seleccionados como muestra de nuestro estudio.
3. Clasificar los posibles errores matemáticos que puedan encontrarse en los libros de texto seleccionados.
4. Analizar las relaciones existentes entre las diferentes clases de errores matemáticos que hayan podido identificarse de la muestra analizada.

6.3. Variables que intervienen en la investigación

Las variables son aquellas características de la realidad cuyo valor (que puede ser numérico o no) está sujeto a cambios y que el investigador puede medir u observar (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2010). Las variables en nuestra investigación se pueden englobar en tres grupos fundamentales: variables de localización, variables de contenido y variables de error matemático.

6.3.1. Localización

Las variables de posición se refieren a la ubicación física del error. Estas variables, que se encuentran junto con su codificación en la Tabla 6, son Libro, Volumen, Capítulo, Página-Total y Páginas-Capítulo.

- Libro. Manual en el que se encuentra el error. Es una variable cuantitativa ordinal, cuyos valores son 1, 2, 3 y 4¹⁷.
- Volumen. Cada libro está dividido en dos volúmenes físicos, diseñados para ser utilizados uno en cada semestre. Es una variable cualitativa dicotómica, con valores A y B (A para el volumen destinado a ser utilizado en el primer semestre, B para el volumen destinado a ser utilizado en el segundo semestre).
- Capítulo. Número del capítulo en el que se encuentra el error. Se trata de una variable cuantitativa discreta con valores enteros entre 1 y 13, según el libro del que se trate.
- Página-Total. Número de página en la que se encuentra el error, considerando una numeración de páginas correlativa en los volúmenes A y B de cada libro. Es una variable cuantitativa discreta que toma valores enteros entre 2 y 330, según el libro analizado al que pertenezca el error.
- Número de ejercicio. En el caso de que la unidad de análisis sea un ejercicio numerado, es el número que etiqueta el ejercicio en el que se encuentra el error. Es una variable cuantitativa discreta que toma valores entre 0 y 50. En el caso de que la unidad de análisis no sea un ejercicio numerado, se le asignó el valor 0.
- Páginas-Capítulo. Número de páginas que posee el capítulo en el que se encuentra el error. Es una variable cuantitativa discreta cuyos valores se encuentran entre 8 y 48, según el libro al que pertenece el error.

17 Por motivos de copyright, en los resultados no se transcribirán los nombres ni las editoriales de los libros de texto analizados, refiriéndonos por tanto a ellos por un número asignado inicialmente al azar.

Tabla 6
Variables de posición

Variable	Descripción	Codificación
Libro	Manual en el que se ubica el error	1: Libro 1 2: Libro 2 3: Libro 3 4: Libro 4
Volumen	Volumen físico del libro en que se ubica el error	A: Volumen 1.er semestre B: Volumen 2.º semestre
Capítulo	Nº del capítulo en que se ubica el error	Valor entero entre 1 y 13
Página-Total	Nº de la página en la que se ubica el error.	Valor entero entre 2 y 330
Páginas-Capítulo	Número de páginas del capítulo en el que se ubica el error	Valor entero entre 8 y 48

6.3.2. Contenido

Las variables de contenido se refieren al contenido al que hace referencia la unidad de análisis en la que se encuentra el error. Existen dos grupos de variables de contenido: variables de contenido matemático y variables de contenido didáctico.

6.3.2.1. Variables de contenido matemático

Las variables de contenido matemático hacen referencia al conocimiento matemático en el que está involucrada la unidad de análisis en la que se encuentra el error. Son las siguientes: Bloque, Bloque-capítulo y concepto.

- Bloque. Área de la matemática a la que pertenece la unidad de análisis en la que se encuentra el error. Es una variable cualitativa nominal. Sus valores son los siguientes:
 - Aritmética. Comprende números, las operaciones que se realizan con ellos, su representación y relaciones y los sistemas numéricos.
 - Medida. Incluye unidades, sistemas y procesos de medida de los atributos mensurables de los objetos.

- Geometría. Se encarga del estudio de las características y propiedades de las figuras bidimensionales y tridimensionales, la localización espacial (mediante sistemas de coordenadas y otros sistemas de representación), las transformaciones y la simetría.
- Análisis de datos. Se dirige a la recolección, organización y muestra de datos en forma de diagramas y tablas y su análisis estadístico con el objetivo de realizar predicciones sobre ellos. También incluye la probabilidad.
- Álgebra. Su objetivo es el estudio de patrones, relaciones y funciones, junto con la representación y el análisis de situaciones y estructuras matemáticas a través del uso de símbolos algebraicos.
- Bloque-Capítulo. Área de la matemática a la que está dedicado el capítulo en el que se encuentra el error. Es una variable cualitativa nominal que toma los mismos valores que la variable Bloque: Aritmética, Medida, Geometría, Análisis de datos y Álgebra.
- Concepto. Contenido matemático al que hace referencia la unidad de análisis que contiene el error. Es una variable cualitativa nominal. Toma los siguientes valores:

- | | |
|--|---|
| ·Números enteros (concepto). | ·Área, circunferencia, radio y diámetro del círculo. |
| ·Suma y resta de números enteros. | ·Área y perímetro de polígonos y figuras compuestas. Se excluye el triángulo, que ya se mencionó antes. |
| ·Producto y división de números enteros. | ·Volumen del cubo y del ortoedro. |
| ·Operaciones combinadas con enteros. | ·Velocidad. |
| ·Números decimales (concepto). | ·Tiempo. |
| ·Suma y resta de números decimales. | ·Dinero. |
| ·Producto y división de números decimales. | ·Ángulos. |
| ·Fracciones (concepto). | ·Figuras geométricas y poliedros. |
| ·Suma y resta de fracciones. | ·Desarrollos de poliedros. |
| ·Producto y división de fracciones. | ·Elementos del círculo. |
| ·Porcentaje. | ·Mosaicos y simetría |
| ·Razón y proporción. | ·Tablas y gráficos lineales. |
| ·Patrones numéricos. | ·Media aritmética. |
| ·Múltiplos y divisores. | ·Diagramas de sectores. |
| ·Raíz cuadrada. | ·Expresiones algebraicas en una variable. |
| ·Longitud, masa y volumen. | |
| ·Área del triángulo. | |

Las variables de área, junto con sus niveles de medición, se encuentran en la Tabla 7.

Tabla 7
Variables de contenido matemático

Variable	Descripción	Codificación
Bloque	Área de contenidos a la que se refiere la unidad de análisis en la que se encuentra el error	1: Aritmética 2: Medida 3: Geometría
Bloque-Capítulo	Área de contenidos a la que se dedica el capítulo en el que se está el error	4: Análisis de datos 5: Álgebra
		101: Números enteros (concepto) 102: Suma y resta de enteros 103: Producto y división con enteros 104: Operaciones combinadas con enteros 105: Números decimales (concepto) 106: Suma y resta con decimales 107: Producto y división con decimales 108: Fracciones (concepto) 109: Suma y resta de fracciones 110: Producto y división con fracciones 111: Porcentaje 112: Razón y proporción 113: Patrones numéricos 114: Múltiplos y divisores 115: Raíz cuadrada
Concepto	Contenido matemático al que se refiere la unidad de análisis en la que se encuentra el error	201: Longitud, masa y volumen 202: Área del triángulo 203: Área, circunferencia, radio y diámetro del círculo 204: Área y perímetro de figuras compuestas 205: Volumen del cubo y del ortoedro 206: Velocidad 207: Tiempo 208: Dinero 301: Ángulos 302: Figuras geométricas y poliedros 303: Desarrollos de poliedros 304: Elementos del círculo 305: Mosaicos y simetría 401: Tablas y gráficos lineales 402: Media aritmética 403: Diagramas de sectores 501: Expresiones algebraicas en una variable

6.3.2.2. Variables de contenido didáctico

Este conjunto se dedica al fin didáctico de la unidad de análisis considerada. Solamente hay una variable de contenido didáctico, Contexto:

- Contexto. Se trata de una variable cualitativa dicotómica, con dos niveles de medición:
 - Problema. El error toma este valor cuando la unidad de análisis a la que pertenece contiene explícitamente una pregunta o una orden. En general se trata de ejercicios o problemas, los cuales pueden estar planteados para ser resueltos por el alumno o bien pueden estar ya resueltos para servir de ejemplo.
 - Teoría. En este caso, la unidad de análisis consiste en una exposición de contenidos teóricos, y por tanto carece de órdenes o preguntas expresas.

A modo de resumen, la Tabla 8 muestra la variable de propósito, junto con su codificación.

Tabla 8
Variables de contenido didáctico

Variable	Descripción	Codificación
Contexto	Forma en que se presenta el contenido	1: Teoría 2: Problema

6.3.3. Error matemático

El último conjunto de variables permite organizar los errores en cuanto a la razón por la cual se considera un error. En particular son dos, Característica y Tipo. A continuación figuran los valores de las variables Característica y Tipo:

- Característica. Es la caracterización del tipo de error cometido. Es una variable cualitativa nominal. Los niveles de medición de Característica son los siguientes:

- Contradicción. En el caso de problemas, existen datos contradictorios. En una exposición teórica, se trata de un ejemplo que no ejemplifica el contenido expuesto.
- Orden absurda. El enunciado de un problema o ejercicio es matemáticamente absurdo.
- Confunde el todo con la parte, la parte con el todo, o la parte con la parte. Se da en situaciones en las que un elemento se confunde con el conjunto al que pertenece o con otro elemento de ese conjunto, o bien un subconjunto se confunde con el conjunto que lo contiene o con otro subconjunto también contenido en ese mismo conjunto.
- Error lógico. Existe un error de razonamiento, ya sea en un ejercicio (resuelto o semiresuelto) o en una exposición teórica.
- Error de concepto. La variable toma este valor cuando se trata de un contenido teórico que entra en contradicción con lo que afirma la matemática, o bien cuando un problema ordena al alumno aplicar dicho contenido erróneo de forma que tal aplicación será matemáticamente incorrecta.
- Error en el libro del profesor. La solución dada en el libro del profesor es incorrecta, pero existe una forma de llegar a ella mediante un razonamiento erróneo (y por tanto, no se trata de una errata).
- Faltan premisas. En una exposición de contenidos, hay una carencia de premisas sin las cuales las conclusiones a las que se llega son falsas.
- Faltan pasos. En una exposición de contenidos, se describe un algoritmo de forma incompleta.
- Falta contenido. Se omite un contenido que es necesario para la correcta y completa exposición teórica, y se utiliza posteriormente dicho contenido omitido. También se aplica a los problemas en los que se hace uso de dicho contenido omitido.
- Faltan datos. En un problema o ejercicio, se omite una información necesaria para que el resultado del ejercicio coincida con el de la guía didáctica.
- Falta claridad. En un contenido teórico, existe ambigüedad y al menos una de las posibles interpretaciones es contraria a lo que afirma la matemática. También aplica a los ejercicios en los que se ordena la descripción de dicho contenido erróneo, o bien la redacción utilizada es confusa y habría de cambiarse para que quedase clara.

- Orden incompleta. Este valor es el que toma la variable en problemas en los que la orden es lo suficientemente inespecífica como para que existan múltiples soluciones, mostrándose solamente una en la guía didáctica.
- Mal uso de símbolos. Existe un mal uso de los símbolos matemáticos o del lenguaje matemático, por lo que se incurre en una contradicción con los dictados de la matemática.
- Tipo. Los diferentes niveles de medición de la variable Característica se han agrupado por afinidad en conjuntos de mayor orden, a los que hemos denominado tipos. La variable Tipo es, pues, una variable cualitativa nominal cuyos niveles de medición son Concepto, Omisión, Indefinición y Símbolo:
 - Concepto. Incluye los errores de características Contradicción, Orden absurda, Error lógico, Error de concepto, Error en el libro del profesor y Confunde el todo con la parte, la parte con el todo o la parte con la parte.
 - Omisión. Contiene las características Faltan premisas, Faltan pasos, Falta contenido y Faltan datos.
 - Indefinición. Los errores de indefinición son aquellos cuyas características son Falta claridad y Orden incompleta.
 - Símbolo. Solamente contiene la categoría Mal uso de los símbolos.

Los distintos valores de las variables Tipo y Característica se pueden ver en la Tabla 9.

Tabla 9.
Variables de error matemático

Valores de la variable Tipo	Valores asociados de la variable Característica
1: Concepto	<p>13: Contradicción. En el caso de problemas, existen datos contradictorios. En una exposición teórica, se trata de un ejemplo que no ejemplifica el contenido expuesto.</p> <p>18: Orden absurda. El enunciado de un problema o ejercicio es matemáticamente absurdo.</p> <p>21: Confunde todo con parte. Un elemento que se confunde con el conjunto al que pertenece o con otro elemento de ese conjunto, o bien un subconjunto que se confunde con el conjunto que lo contiene o con otro subconjunto también contenido en ese mismo conjunto.</p> <p>22: Error lógico. Existe un error de razonamiento, ya sea en un ejercicio (resuelto o semiresuelto) o en una exposición teórica.</p> <p>24: Error de concepto. La variable toma este valor cuando se trata de un contenido teórico que entra en contradicción con lo que afirma la matemática, o bien cuando un problema ordena al alumno aplicar dicho contenido erróneo de forma que tal aplicación será matemáticamente incorrecta.</p> <p>32: Error en el libro del profesor. La solución dada en el libro del profesor es incorrecta, pero existe una forma de llegar a ella mediante un razonamiento erróneo (y por tanto, no se trata de una errata).</p>
2: Omisión	<p>11. Faltan premisas. En una exposición de contenidos, hay una carencia de premisas sin las cuales las conclusiones a las que se llega son falsas.</p> <p>12. Faltan pasos. En una exposición de contenidos, se describe un algoritmo de forma incompleta.</p> <p>17: Falta contenido. Se omite un contenido que es necesario para la correcta y completa exposición teórica, y se utiliza posteriormente dicho contenido omitido. También se aplica a los problemas en los que se hace uso de dicho contenido omitido.</p> <p>20: Faltan datos. En un problema o ejercicio, se omite una información necesaria para que el resultado del ejercicio coincida con el de la guía didáctica.</p>
3: Indefinición	<p>14: Falta claridad. En un contenido teórico, existe ambigüedad y al menos una de las posibles interpretaciones es contraria a lo que afirma la matemática. También aplica a los ejercicios en los que se ordena la descripción de dicho contenido erróneo o en los que la orden o pregunta tiene una redacción confusa.</p> <p>19. Orden incompleta. La orden es lo suficientemente inespecífica como para que existan múltiples soluciones, mostrándose solamente una en la guía didáctica.</p>
4: Símbolo	<p>23: Mal uso de símbolos. Existe un mal uso de los símbolos matemáticos o del lenguaje matemático, por lo que se incurre en una contradicción con los dictados de la matemática.</p>

7. Metodología de la investigación.

La presente investigación se encuadra dentro de la investigación cualitativa (Aravena, Kimelman, Micheli, Torrealba y Zúñiga, 2006; Bisquerra Alzina, 2004; López Noguero, 2002; Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez, 1996; Stake, 1995; Taylor y Bogdan, 1987) orientada a la comprensión (Dorio, Sabariego y Massot, 2004), propia del paradigma humanístico-interpretativo, debido a la finalidad del estudio, el análisis inductivo y sobre todo la comprensión holística de una situación particular (González Morales, 2003; Gutiérrez Pérez, Pozo Llorente y Fernández Cano, 2002; Merino, 1995).

De acuerdo con este criterio, nos aproximamos a una realidad “desde dentro”, los libros de texto de 6º curso de matemáticas de Singapur, para identificar la existencia de error matemático, describir sus características, descubrir leyes de comportamiento del error en el libro de texto, comprender lo que es único y particular de él frente a otros y encontrar los significados e implicaciones que esto pueda tener en el diseño de un recurso didáctico de gran frecuencia de uso en el aula como es el libro de texto, en la enseñanza de la matemática y en el rendimiento de los alumnos en esta materia.

El diseño de la investigación es inductivo, abierto, flexible, de carácter descriptivo (Bartolomé, 1992; Dorio et al., 2004) y utiliza el análisis de contenido como principal técnica de recogida de datos y de cuantificación, así como el pensamiento reflexivo y crítico en la valoración del significado de los datos encontrados en la mejora del rendimiento matemático de los alumnos.

La investigación que hemos realizado no puede probar sus hipótesis mediante la experimentación o la observación sistematizada, ni tampoco puede controlar todas las variables determinantes del rendimiento matemático de los alumnos. Tan solo pretende aportar una posible explicación a la posición destacada de este país en la evaluación internacional, a partir de la calidad de sus libros de texto, mediante el estudio del error, y algún referente de mejora educativa para nuestro país en aspectos relacionados con la enseñanza de la matemática.

El principal sustento de este trabajo de investigación lo constituyen las fuentes documentales (libros de texto de 6° curso de Educación Primaria de Singapur), que proporcionan datos valiosísimos para conocer la existencia del error y sus características más representativas y singulares del fenómeno estudiado.

El trabajo, enmarcado dentro de una investigación cualitativa, se limita a examinar la existencia de error matemático en los libros de texto disponibles, teniendo en cuenta las dificultades de acceso impuestas por el gobierno singapurense, con la mayor exhaustividad posible, e intentando obtener la mejor comprensión y significado de los hechos que rodearon a su contenido en los libros de texto, mediante construcciones hipotéticas suficientemente serias como para proporcionar una explicación satisfactoria de los mismos.

Si bien el investigador es el principal instrumento de medida a la hora de identificar el individuo muestral, porque es él quien filtra la realidad del libro de texto, se han tomado medidas para controlar esa subjetividad y asegurar la validez (Kendall y Gibbons, 1990), y fiabilidad de los datos (Hernández Sampieri et al., 2010; Stemler, 2001; Fleiss, Cohen y Everitt, 1969) y del procedimiento seguido para su obtención (López Noguero, 2002).

El análisis documental ha sido una actividad sistemática y planificada, se ha hecho sobre documentos oficiales (Del Rincón, Arnal, Latorre y Sans, 1995), y mediante un análisis de contenido cuantitativo (Andréu Abela, 2002; Bardin, 2002; Bernete García, 2014; Krippendorff, 2004; Lalande, 2010), centrado en el contenido expreso (López Noguero, 2002) y con alcance descriptivo (Piñuel Raigada, 2002). También se ha empleado un sistema de triangulación, y un sistema de registro y clasificación del error y su localización validado, que explicaremos más adelante, y que son prototípicos de este tipo de estudios (Eisner, 1998).

7.1. Población y muestra

El universo de esta investigación lo conforman los libros de texto de Matemáticas que se utilizan en Singapur.

La población de estudio, por su parte, se compone de todos los libros de Matemáticas usados en Singapur durante la etapa de Educación Primaria.

La muestra la conforman todos los libros de texto de Matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria en su variante Standard, aprobados por el Ministerio de Educación de Singapur para su uso durante el periodo 2009-2017 (Ministerio de Educación de Singapur, 2016a), cuatro en total.

El motivo por el que se eligieron los libros del último curso de Educación Primaria es que en dicho curso se utilizan prácticamente todos los conceptos matemáticos aprendidos a lo largo de toda esta etapa educativa.

Asimismo, en Singapur los alumnos de Educación Primaria pueden cursar Matemáticas en dos niveles, Standard (nivel superior, para los alumnos con mejores resultados académicos en Matemáticas) y Foundation (nivel inferior, para los de peores resultados académicos en Matemáticas). La versión Standard ha sido elegida por ser más completa en cuanto a contenidos matemáticos que la Foundation y por estar destinada a los alumnos que obtienen buenos resultados académicos en Matemáticas, que constituyen en torno al 90% de la población total de alumnos.

Cada uno de los libros recomendados por el Ministerio de Educación de Singapur está dividido en cuatro volúmenes. Dos de ellos corresponden al *coursebook* o libro de texto propiamente dicho, y los otros dos son *workbooks* o libros de ejercicios. De acuerdo con la definición de libro de texto empleada en este trabajo, los libros de ejercicios fueron excluidos de la muestra al carecer de contenidos teóricos, que pudieran ser susceptibles de contener error matemático.

De entre todos los libros editados en Singapur para 6.º curso de Educación Primaria en su versión Standard, se tomó como muestra todos los libros de texto (sin su *workbook*) de Matemáticas recomendados por el Ministerio de Educación de Singapur, un total de cuatro. Dicha muestra reúne características que la hacen representativa de la población, como veremos a continuación.

Por un lado, hay que tener en cuenta que los alumnos de Educación Primaria de Singapur están obligados por ley a asistir a centros públicos (Compulsory Education Act, Revised Edition 2001).

Por otro lado, aunque no nos ha sido posible realizar una encuesta sobre el uso del libro de texto en los centros públicos, ya que el Ministerio de Educación de Singapur nos denegó el permiso, en paralelo a dicha solicitud al Ministerio, se hizo una búsqueda exhaustiva por los sitios web de los centros públicos de Primaria de Singapur (164 en el año 2015). El resultado fue que solo 52 de ellos (31,7% del total de centros) publicaban su lista de libros de texto para su uso durante el año 2015, y todos ellos utilizaban, en ambas modalidades, los libros de texto recomendados por el Ministerio de Educación de Singapur. En Singapur, la probabilidad de que un centro público no use los libros de texto recomendados por el Ministerio de su país es prácticamente nula, por lo que puede deducirse, sin la menor duda, que la muestra estudiada contiene todas las características de la población objeto de estudio.

Aun así, si se considera la posibilidad de que un centro público de Singapur pueda o no utilizar libros de texto recomendados por el Ministerio de Educación (y, por tanto, que la probabilidad de que utilice un libro de texto recomendado sea de 0.5), la probabilidad que al elegir 52 de ellos, todos ellos hayan dicho que utilizan libros recomendados es del orden de 2.22×10^{-16} , es decir, prácticamente nula. Sin embargo, eso es justamente lo que hemos obtenido: que los 52 centros que hemos podido consultar a través de su web utilizaban en las dos modalidades libros recomendados por su Ministerio de Educación.

Si nuestra muestra de centros consultados hubiera sido aleatoria (algo que el Ministerio de Educación no nos permitió), el tamaño muestral necesario para poder obtener resultados con un nivel de significación del 95% y una población de 164 centros tendría que haber sido, como mínimo, de $n=50.51$ centros.

Al no existir fórmulas estadísticas que nos permitan calcular el tamaño muestral de una muestra no aleatoria, a partir de aquí, se estudió la probabilidad de que los 52 consultados afirmen que utilizan un libro de texto recomendado por el Ministerio de Educación, en base a la probabilidad de que el centro utilice o no libros de texto de Matemáticas recomendados por el Ministerio.

Como puede verse en la Tabla 10 a continuación, para que la probabilidad de haber obtenido que los 52 centros consultados afirmen que utilizan un libro de texto recomendado por el Ministerio de Educación sea superior a 0,001, la probabilidad de que el centro utilice un libro de texto de matemáticas recomendado por el Ministerio

de Educación debería ser de, al menos, 0.8756 (es decir, al menos el 87.56% de los centros utiliza libros de texto de matemáticas recomendados por el Ministerio de Educación).

Tabla 10.

Probabilidad de que un suceso salga 52 veces en 52 experimentos en base a la probabilidad de ese suceso.

Probabilidad de un suceso	Probabilidad de que un suceso salga 52 veces en 52 experimentos en base a su probabilidad
0,5	$2,22 \times 10^{-16}$
0,8	$9,13 \times 10^{-6}$
0,85	$2,13 \times 10^{-4}$
0,875	$9,64 \times 10^{-4}$
0,8756	$9,997 \times 10^{-4}$
0,88	0,12
0,89	0,23
0,9	0,41
0,91	0,74
0,95	6,94
0,97	20,51
0,99	59,29
0,999	94,93

Todo esto nos lleva a afirmar que nuestra muestra, conformada por los cuatro libros de texto de Matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria recomendados por el Ministerio de Educación de Singapur para la modalidad Standard, es representativa de nuestra población.

Por esta razón, consideramos que los recomendados por el Ministerio de Educación de Singapur constituyen pues un conjunto pertinente de acuerdo a los requisitos que debe reunir el corpus de todo análisis de contenido (Bardin, 2002; Bernete García, 2014; Landry, 1998; Ouellet y Mayer, 1991).

En el Anexo 6 se proporcionan todos los datos acerca de los libros analizados.

Los individuos muestrales son el conjunto de todos los errores que se han encontrado dentro de la muestra de libros analizados. Se trata de una elección casual, accidental, no intencional (Buendía Eisman, Colás Bravo y Hernández Pina, 1997), debido a que ha sido el investigador el que ha seleccionado los elementos con el criterio de que cada individuo que la compone sea de hecho un error.

La determinación de los individuos muestrales se llevó a cabo mediante diversos procedimientos: prueba del contraejemplo, identificación de contradicción, comparación de las definiciones dadas en los contenidos con las existentes en distintos diccionarios de Matemáticas y Física (Bouvier y George, 2005; Clapham, 1998; Clapham y Nicholson, 2009; Daintith, 1982), análisis de los pasos descritos en la descripción de métodos y algoritmos, resolución de problemas para comparación de los resultados obtenidos con los mostrados en el propio libro y comparación con muestras existentes (Fernández Palop, 2013).

El recuento de datos (errores matemáticos) se ha realizado de acuerdo a los siguientes criterios:

- Cuando en el contenido a analizar se encontraba más de un error, se consideraron dos o más individuos muestrales, tantos como errores se encontrasen en el mismo fragmento.
- Se excluyeron las erratas y otros errores tipográficos o gramaticales que no afectasen al contenido matemático expreso de cada unidad de registro.
- En caso de que un error (por ejemplo, una definición errónea) provocase otro error (por ejemplo, un ejercicio en el que se pide que se aplique dicha definición errónea), si el segundo error desaparece cuando se corrige el error en el primero, solamente se tomaría como error el primero, no el segundo. Ahora bien, si en el segundo ejercicio se muestra una aplicación incorrecta de la misma definición errónea, entonces la subsanación del primer error no sería suficiente para corregir el segundo y, por tanto, se contabilizarían ambos errores.

Con el fin de evitar vicios o variaciones involuntarias en la aplicación de los criterios de clasificación por parte del investigador, tanto los libros como los errores fueron revisados dos veces por el investigador, en dos momentos diferentes y distanciados en el tiempo, de manera complementaria, para garantizar la validez, con el objetivo de que la muestra fuese completa y los criterios para obtenerla absolutamente invariables en el tiempo.

Los individuos muestrales obtenidos tras este barrido múltiple de la muestra alcanzaron un total de 686 individuos, los cuales para garantizar su validez (Cabero Almenara y Loscertales Abril, 1996) fue sometida a escrutinio por un grupo de expertos a partir de un subconjunto aleatorio (muestra estratificada) de la muestra inicial.

Confirmada la validez de la muestra, en este trabajo se analizaron estadísticamente las frecuencias de cada variable.

7.2. Instrumentos

La recolección de datos se realizó, en primera instancia, mediante una lista de control por columnas, que contaba con los siguientes campos (ver Anexo 7):

- Error. Número de identificación del error.
- Libro. Número asignado al libro en el que se encontró el error.
- Volumen. Volumen del libro (A o B) en el que se encontró el error.
- Capítulo. Número del capítulo en el que se encontró el error, utilizando una numeración correlativa para los dos volúmenes.
- Página. Página del volumen en la que se encontró el error.
- Página-Total. Número de la página en la que se encontró el error utilizando una numeración correlativa de páginas para los dos volúmenes.
- N.º de ejercicio. El número asociado a la unidad de análisis en la que se encontró el error.
- Extracto. Copia íntegra de la unidad de análisis, o del fragmento de la misma en el que se encontró el error.
- Contexto. Propósito de la unidad de registro (contenido teórico o ejercicio) en que se encontró el error.
- Bloque-Capítulo. Bloque de contenidos al que se dedica el capítulo al que pertenece la unidad de análisis en la que se encontró el error.
- Bloque. Bloque de contenidos al que se dedica la unidad de análisis en la que se encontró el error.
- Concepto. Contenido concreto, dentro del bloque de contenidos, al que hace referencia la unidad de análisis en la que se encontró el error.
- Tipo. Categoría principal del error encontrado.
- Característica. Identificación de la forma en la que se manifestó el error matemático encontrado.

Para la identificación del error matemático (elementos de control Tipo y Característica) se empleó el instrumento de medición desarrollado por Fernández Palop (2013), y se determinó el nivel de confiabilidad intercodificadores para este estudio mediante la W de Kendall. Dicho coeficiente fue calculado para las condiciones de exhaustividad ($W=0,628$), homogeneidad ($W=0,601$), exclusión mutua ($W=0,563$), pertinencia ($W=0,972$) y productividad ($W=0,941$). Los valores encontrados, de acuerdo a la escala de Kendall y Gibbons (1990), nos permiten afirmar que existen niveles de acuerdo moderado en las tres primeras y muy fuerte en las dos últimas, que garantizan los niveles de concordancia necesarios entre las evaluaciones de expertos utilizadas.

7.3. Procedimiento de recogida de datos

El procedimiento de recolección de datos se efectuó siguiendo las fases y métodos indicados por las fuentes consultadas y descritas en el marco teórico de este trabajo (Gómez Mendoza, 2000; Bardin, 2002; Bernete García, 2014; Cabero Almenara y Loscertales Abril, 1996; Stemler, 2001; Piñuel Raigada, 2002).

La descripción sobre cómo cristalizaron dichas fases y métodos se muestra a continuación.

7.3.1. Selección de documentos

En primer lugar, en cumplimiento del objetivo principal de la investigación, se seleccionaron los libros de 6.º curso de Educación Primaria de Singapur que formarían la muestra.

En Singapur, existen dos niveles de estudio de Matemáticas en 6.º curso de Primaria, que reciben los nombres de Standard y Foundation, siendo la segunda una versión simplificada de la primera para alumnos con peores resultados académicos en Matemáticas, por lo que en la selección de documentos se decidió analizar la versión completa, esto es, la Standard. Una vez tomada esta decisión, se vio que la mayoría de los alumnos de Singapur siguen la modalidad Standard (aunque carecemos de

datos oficiales, parece ser que supera el 90% de los alumnos¹⁸), lo que hacía que la elección de nuestra muestra fuera aún más representativa.

El Ministerio de Educación de Singapur publica la lista de los libros de texto recomendados para su uso en las aulas de todos los colegios públicos de Singapur. Esta lista, con vigencia en el periodo 2009-2017, contiene cuatro manuales correspondientes a la asignatura Matemáticas, en su modalidad Standard, de 6.º curso de Educación Primaria. De esta lista se escogieron los libros de texto propiamente dichos, excluyéndose sus correspondientes *workbooks*. Para garantizar la representatividad de la muestra, se tomaron los cuatro manuales.

7.3.2. Unidades de muestreo, contexto y registro

La segmentación del corpus se realizó de la siguiente forma:

- Unidad de muestreo. Se tomó cada uno de los libros de que se compone la población.
- Unidad de contexto. Como unidad de contexto se tomaron los capítulos. Las secciones de revisión, excepto cuando aparecieron numeradas como capítulos aparte, se consideraron como parte del capítulo precedente.
- Unidad de registro. La transcripción de cada ejercicio o sección de teoría en el que se identificó un error. Ésta se recogió mediante una copia exacta (digitalización), exceptuando los casos de gran extensión del ejercicio o fragmento teórico.

7.3.3. Categorización

Finalizada la etapa de recogida de datos, se llevó a cabo su clasificación. Para clasificarlos, se atendió a cuatro criterios (Fernández Palop, 2013): localización (a través del libro, capítulo y página), área (donde se clasificó a través del bloque de contenido donde se había hallado el error y del concepto matemático relacionado con

¹⁸ Esta información procede del Doctor Yeap Ban Har, ex profesor en el National Institute of Education y actual director del Marshall Cavendish Institute de Singapur, al que preguntamos directamente por este dato.

el error), propósito (ya fuera si el error se encontraba en una exposición de contenidos teóricos o en un problema) e identificación del tipo de error.

7.3.3.1. Localización: Libro, Volumen, Página, Capítulo y Extracto

En cuanto a la clasificación de errores por su localización, estos fueron clasificados por libro en el que se encontraban (independientemente del volumen), y dentro de cada libro por capítulo y por página (considerándose intervalos de 50 páginas).

7.3.3.2. Área: Bloque de contenido, Concepto y Bloque-Capítulo

Para su clasificación por bloque de contenido, éste fue determinado a partir de la clasificación que define el National Council of Teachers of Mathematics o NCTM (s.f.). Al estar el currículo muy claramente segmentado, el bloque de contenido quedaba determinado en la mayor parte de los casos. En aquellos ejercicios en los que se requería de varios bloques para su resolución, se optó por clasificar el ejercicio de acuerdo al bloque de contenido al que se hacía referencia en la pregunta u orden del enunciado.

En cuanto al concepto, se almacenó el que figura en el currículo de 6.º curso, pero pronto aparecieron contenidos de repaso que pertenecían a 5.º curso o incluso a 4.º curso, por lo que se tuvieron en cuenta los conceptos de los tres currículos.

En cuanto a la clasificación por bloque-capítulo, se trata del bloque de contenido (según el estándar del NCTM) al que se dedicaba el capítulo en el que se encontró el error. En el caso de los errores encontrados en esos capítulos, no se rellenó el campo bloque-capítulo.

En la Tabla 11 se señalan los bloques de contenido con los conceptos que abarca cada uno de ellos.

Tabla 11.
Bloques de contenido y conceptos

Bloque	Concepto	Bloque	Concepto	
Números y Operaciones	Números enteros (concepto)	Medida	Longitud, masa y volumen	
	Suma y resta de números enteros		Área del triángulo	
	Multiplicación y división de números enteros		Área y circunferencia del círculo	
	Orden de las operaciones		Área y perímetro de una figura compuesta	
	Números decimales (concepto)		Volumen del cubo y del ortoedro	
	Suma y resta de números decimales		Distancia, tiempo y velocidad	
	Multiplicación y división de números decimales		Ángulos	
	Fracciones (concepto)		Geometría	Figuras geométricas
	Suma y resta de fracciones			Desarrollos de poliedros
	Multiplicación y división de fracciones		Análisis de datos y Probabilidad	Tablas y gráficos lineales
Porcentaje		Media aritmética		
Razón		Diagramas de sectores		
		Álgebra	Expresiones algebraicas en una variable	

7.3.3.3. Propósito: Contexto

En cuanto a la clasificación por Contexto, éste puede ser: teoría y problema.

En los libros españoles los ejercicios frecuentemente constan de enunciado o bien se trata de ejercicios resueltos. En los libros de Singapur, además, se puede distinguir un tercer tipo de ejercicios, que hemos denominado semirresueltos. Estos ejercicios contienen el enunciado y la resolución, pero al menos uno de los valores de la misma no aparecen, existiendo en su lugar un espacio en blanco para que lo rellene el alumno con el número adecuado.

Los tres tipos de ejercicios tienen en común la presencia de una pregunta o una orden dirigida al lector, mientras que los contenidos teóricos carecen de ella, al tener un carácter enteramente expositivo.

Por tanto, la clasificación por contexto dependió de la respuesta a la pregunta: ¿existe una orden o pregunta en el texto? En caso afirmativo, se trataba de un ejercicio. En caso negativo, era un contenido teórico.

7.3.3.4. Identificación del error: Tipo y Característica

A pesar de la existencia de algunas clasificaciones de errores presentes en libros de texto (Borel, 1962; Brewer, 1985; Fernández Bravo, 2011; Jaime Pastor, Chapa Aguilera y Gutiérrez Rodríguez, 1992; Muntean, 2011), seleccionamos la clasificación de Fernández Palop (2013) por ser la más completa, la más exportable a todo tipo de libros de Matemáticas, y la que mejor se ajustaba a nuestros objetivos de investigación.

Para cada unidad de análisis, se identificó una característica de error matemático, viendo de este modo el tipo de error matemático.

7.3.4. Fiabilidad y validez del análisis de contenido

Para garantizar la fiabilidad y validez del análisis de contenido, se pidió a un grupo formado por cuatro expertos que analizaran y tipificaran una muestra aleatoria formada por 70 unidades de registro. El número mínimo de errores que nos proporcionaban un intervalo de confianza del 95% y un 5% de margen de error era 66, por lo que se tomó esa cantidad de unidades de registro al azar de entre las que se determinó inicialmente que contenían errores. Las otras cuatro fueron seleccionadas al azar de entre todas las que no tuvieron errores identificados en primera instancia. Como algunas de las unidades de registro poseían más de un error, la muestra contenía en total 86 errores.

Esta colección de unidades de registro, junto con las instrucciones necesarias, se envió a cuatro expertos independientes que identificaron los errores existentes en ellos y se compararon, mediante la Kappa de Cohen/Fleiss (Fleiss et al., 1969; Landis y Koch, 1977). El documento que fue presentado a los expertos compone el Anexo 4.

En las respuestas de los codificadores se observó que ninguno de ellos identificó en ninguna de las unidades de registro de la muestra más errores de los que se consideraron en la lista definitiva. Las diferencias se debieron, pues, a diferentes catalogaciones de un error o bien a que alguno de los codificadores no consideró que éste existiese.

El número de coincidencias en cada una de las seis posibles parejas de intercodificadores estuvo entre 50 y 72, por lo que los valores de las respectivas Kappas de Cohen osciló entre 0,55 y 0,82. La media aritmética de todas ellas fue igual a 0,69. Esto supone nivel de acuerdo sustancial al ser superior a 0,61, el cual representa un nivel de acuerdo general razonablemente bueno (Stemler, 2001).

7.4. Análisis de datos

En esta sección se muestra un listado de los distintos análisis realizados sobre los datos. El orden reflejado en la lista no coincide necesariamente con el orden en que las distintas operaciones fueron efectuadas, sino con el de los objetivos de nuestro estudio.

- Para dar cumplimiento a los dos primeros objetivos de nuestra investigación, que son la descripción y clasificación de los posibles errores matemáticos encontrados en los libros que componen la muestra, se sometió a los datos en primer lugar a análisis de frecuencias y porcentajes univariantes, bivariantes y multivariantes.
- El tercer objetivo de la investigación, el análisis de las relaciones existentes entre las diferentes clases de errores, requirió para su consecución de la realización de las siguientes operaciones:
 - La homogeneidad de los datos a través de los diferentes libros que integran el corpus analizado fue estudiada mediante la chi-cuadrado de Pearson (Pearson, 1900). Esta homogeneidad fue descrita atendiendo a los criterios de Bloque-Capítulo, Bloque, Tipo y Contexto. El resto de variables también fueron utilizadas para determinar un posible efecto en el resultado de las pruebas de homogeneidad, mediante la estratificación de los datos respecto a cada una de estas variables y calculando la chi-cuadrado de cada estrato.

- Nuevamente se hizo uso de la chi-cuadrado de Pearson para la realización de pruebas de independencia entre variables. En estas pruebas se cruzaron las variables Contexto y Bloque-Capítulo, Contexto y Bloque, Contexto y Tipo y por último Bloque y Tipo. Al igual que en el punto anterior, se atendió a la posible influencia de las demás variables en los resultados.
- Finalmente se realizaron test de bondad de ajuste, nuevamente mediante la chi-cuadrado de Pearson, para verificar la uniformidad de la distribución de la variable Libro.

Todos los cálculos mencionados fueron realizados mediante el programa SPSS 20, con un nivel de confianza del 95% y un margen de error del 5% (nivel de significación $p \leq 0,05$).

8. Resultados.

En este capítulo se recogen los resultados de los análisis estadísticos realizados sobre los datos. Estos análisis se han realizado con el fin de cumplir con los objetivos de la investigación.

El primer objetivo es la descripción de los errores matemáticos. Para ello, se han calculado las frecuencias absolutas y relativas de los errores según su distribución a lo largo de los libros, de los capítulos, de las páginas de cada libro y del bloque de contenidos al que se refiere cada capítulo. Estas frecuencias se han realizado en forma de tablas univariantes y, para conocer la distribución de las variables anteriores en cada libro, bivariantes.

Para el cumplimiento del segundo objetivo, la clasificación de los errores encontrados, ésta se ha realizado en base a distintos criterios: bloque de contenidos, se han realizado análisis bivariantes y multivariantes para obtener las frecuencias tanto de las variables de los análisis anteriores de acuerdo a su distribución por libros, como de varias combinaciones de dos variables que incluyen bloque de contenidos, propósito, tipo de error, concepto, y diferentes pares de variables que incluyen también el bloque de contenidos en el que se encuentra el error. Todos los cálculos se han efectuado tanto para toda la muestra como de forma individual para cada libro.

Por último, el tercer objetivo de la investigación ha requerido la realización de análisis de correlación (entre el número de errores y el número de páginas), pruebas de bondad de ajuste para comprobar la divergencia entre las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas de acuerdo a varias condiciones, pruebas de homogeneidad de muestras sobre los libros para determinar si se comportan como una única muestra y por último pruebas de independencia para comprobar la existencia o no de influencia de unas variables sobre otras.

8.1. Descripción de la distribución de los errores matemáticos

El siguiente grupo de análisis se llevó a cabo para dar cumplimiento a los dos primeros objetivos de la investigación, la identificación y la descripción de la distribución de los posibles errores matemáticos que se hayan podido encontrar. Esta descripción se basa en las frecuencias de cada una de las variables: en qué libro, capítulo y página se encuentra el error, cuál es el bloque de contenidos al que pertenece que lo contiene. También se considera el número de errores por unidad de análisis. Se muestran también todas las frecuencias de las variables anteriores en cada uno de los libros de la muestra.

8.1.1. Errores por libro de texto

En primer lugar, se analizó el número de errores matemáticos en cada libro. El total de errores, 685, se distribuye de forma desigual entre los libros (Tabla 12 y Figura 12), encontrándonos con que el Libro 1 tiene un 37,8% del total (259 errores), el Libro 2 un 26,7% (183 errores), el Libro 3 tiene un 21,4% (147 errores) y finalmente el Libro 4 contiene el 14,1% restante (97 errores). Al no haber errores descartados, todos los elementos de la muestra inicial fueron tenidos en cuenta.

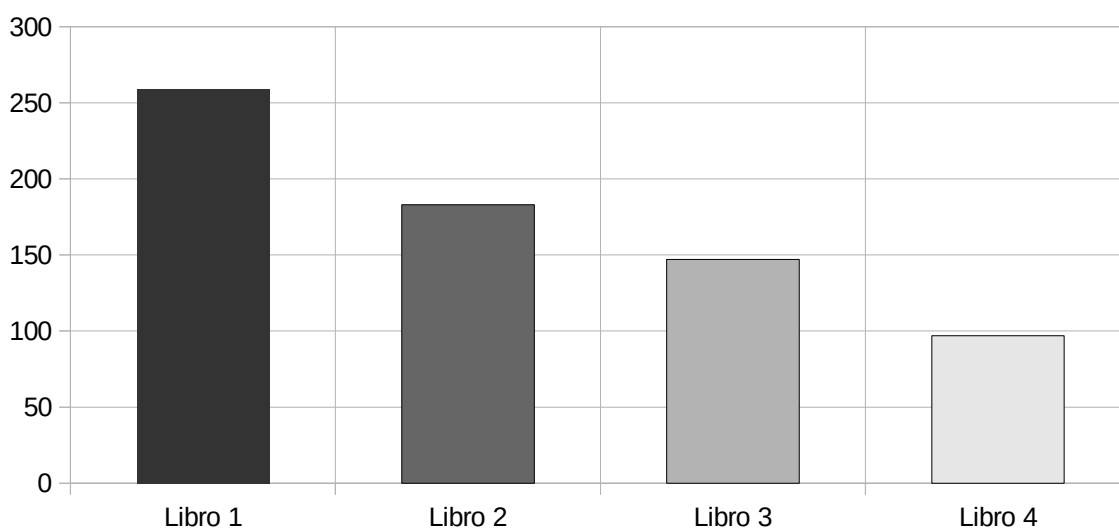


Figura 12. Frecuencias de la variable Libro.

Tabla 12
Frecuencias y porcentajes de la variable Libro.

Libro	Frecuencia	Porcentaje
Libro 1	259	37,8%
Libro 2	182	26,6%
Libro 3	147	21,5%
Libro 4	97	14,2%
Total	685	100%

8.1.2. Errores por Capítulo

En cada Libro, la variable Capítulo se distribuye de la siguiente forma:

- El Libro 1 tiene 11 capítulos, con valores entre 1 y 11. El número máximo de errores se alcanza en el capítulo 11, un total de 93 errores. Esto supone un 35,91% de los errores del libro y un 13,56% del cómputo total de errores matemáticos. El número mínimo de errores se encuentra en los capítulos 3 y 4, donde se encuentran 9 errores. Los errores de cada uno de estos capítulos cuentan por un 1,31% de los errores del libro y un 1,3% del total de errores matemáticos.
- El Libro 2 tiene 13 capítulos, con valores entre 1 y 13. El capítulo con mayor número de errores es el capítulo 9, donde se encuentran 49 errores (un 26,37% de los errores del libro, lo que equivale a un 7,01% de los errores analizados). Por su parte, los capítulos 2 y 12 contienen el número mínimo de errores encontrados en el libro, un total de 3 en cada capítulo. Éstos suponen un 1,65% de los errores del libro, es decir, un 0,44% de los errores totales encontrados.
- El Libro 3 tiene 11 capítulos, con valores entre 1 y 11. El número máximo de errores se alcanza en el capítulo 11, que contiene 38 errores. Esto supone un 25,85% de los errores del libro y un 5,54% del cómputo total de errores matemáticos. El número mínimo de errores se encuentra en el capítulo 9 donde solamente se identificó 1 error. Éste supone un 0,68% de los errores del libro o bien un 0,15% del total de errores
- El libro 4 tiene 12 capítulos, con valores entre 1 y 12. El capítulo con mayor número de errores es el capítulo 6, donde se encuentran 31 errores (un 31,96% de los errores del libro, lo que equivale a un 4,52% de los errores analizados). Por su parte, los capítulos 4, 10 y 11 no contienen ningún error.

Los datos se muestran en la Tabla 13 y en las Figuras 13 y 14.

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

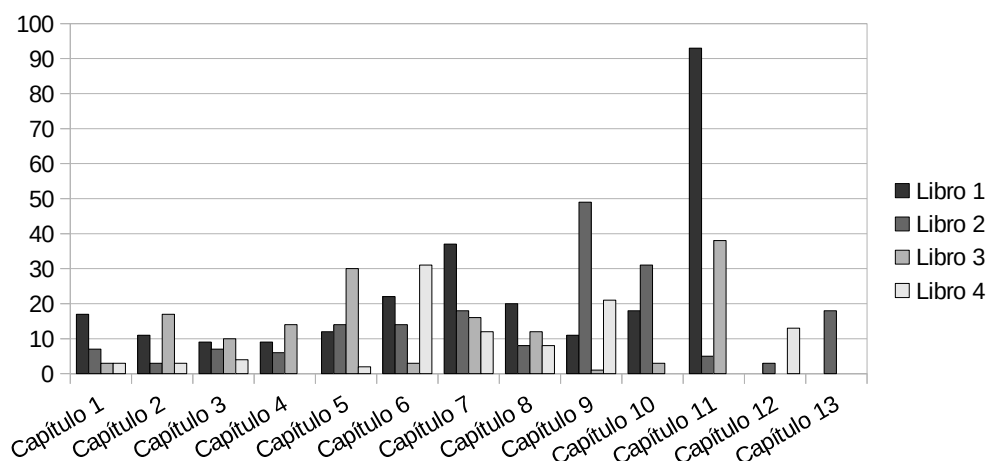


Figura 13. Número de errores por Capítulo en cada Libro.

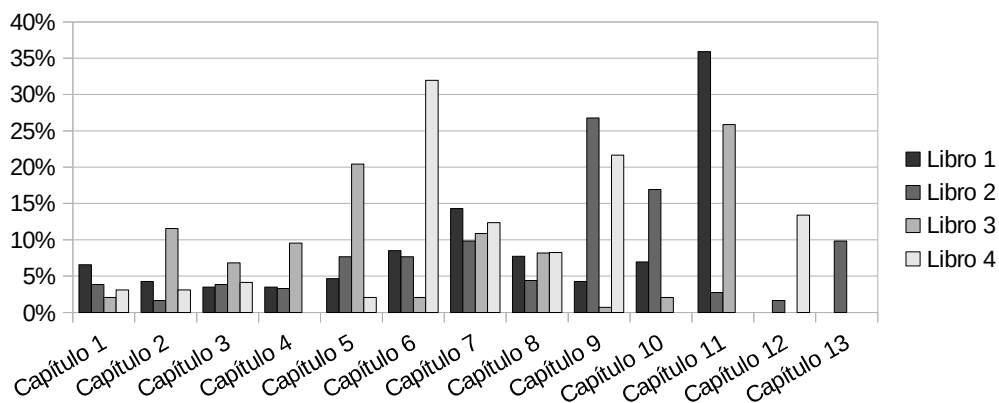


Figura 14. Porcentaje de errores por Capítulo dentro de cada Libro.

Tabla 13

Número, porcentaje del Libro y porcentaje del total de errores por Capítulo.

Cap.	Libro 1			Libro 2			Libro 3			Libro 4		
	Frec	%1	%2	Frec	%1	%2	Frec	%1	%2	Frec	%1	%2
1	17	2,48%	6,56%	7	1,02%	3,85%	3	0,44%	2,04%	3	0,44%	3,09%
2	11	1,60%	4,25%	3	0,44%	1,65%	17	2,48%	11,56%	3	0,44%	3,09%
3	9	1,31%	3,47%	7	1,02%	3,85%	10	1,46%	6,80%	4	0,58%	4,12%
4	9	1,31%	3,47%	6	0,87%	3,30%	14	2,04%	9,52%	0	0,00%	0,00%
5	12	1,75%	4,63%	14	2,04%	7,69%	30	4,37%	20,41%	2	0,29%	2,06%
6	22	3,21%	8,49%	14	2,04%	7,69%	3	0,44%	2,04%	31	4,52%	31,96%
7	37	5,39%	14,29%	18	2,62%	9,89%	16	2,33%	10,88%	12	1,75%	12,37%
8	20	2,92%	7,72%	8	1,17%	4,40%	12	1,75%	8,16%	8	1,17%	8,25%
9	11	1,60%	4,25%	49	7,01%	26,37%	1	0,15%	0,68%	21	3,06%	21,65%
10	18	2,62%	6,95%	31	4,52%	17,03%	3	0,44%	2,04%	0	0,00%	0,00%
11	93	13,56%	35,91%	5	0,73%	2,75%	38	5,54%	25,85%	0	0,00%	0,00%
12	-	-	-	3	0,44%	1,65%	-	-	-	13	1,90%	13,40%
13	-	-	-	18	2,62%	9,89%	-	-	-	-	-	-
Total	259	37,8%	100%	183	26,6%	100%	147	21,4%	100%	97	14,1%	100%

¹Porcentaje del total de errores

²Porcentaje de los errores del libro

8.1.3. Errores por Bloque-Capítulo

La variable Bloque-Capítulo indica el área de la matemática en la que se engloba el capítulo al que pertenece el error. Aunque la mayor parte de los capítulos tienen un área principal a la que están dedicados, existen en el Libro 2 y en el libro 4 algunos temas de repaso, que no pertenecen a ningún bloque. Los errores de esos capítulos (34 en total, apenas un 5% de los 685 errores analizados) se consideran perdidos en esta sección.

La frecuencia más alta la alcanza el valor Medida, con 416 errores (un 63,90% de los valores válidos), y la más baja es la de Análisis de datos, con 20 errores y un 3,07% del total de valores válidos. Medida no solamente es la más alta, sino que aglutina a la inmensa mayoría de los errores encontrados, estando muy por encima del siguiente valor más frecuente, Aritmética, con un 14,90% (Tabla 14 y Figura 15).

Tabla 14
Frecuencias y porcentajes de la variable Bloque-Capítulo.

	Bloque-Capítulo	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido
Válidos	Aritmética	97	14,16%	14,90%
	Medida	416	60,73%	63,90%
	Geometría	74	10,80%	11,37%
	Análisis de datos	20	2,92%	3,07%
	Álgebra	44	6,42%	6,76%
	Total	651	95,04%	100,00%
Perdidos		34	4,96%	
Total		685	100,00%	

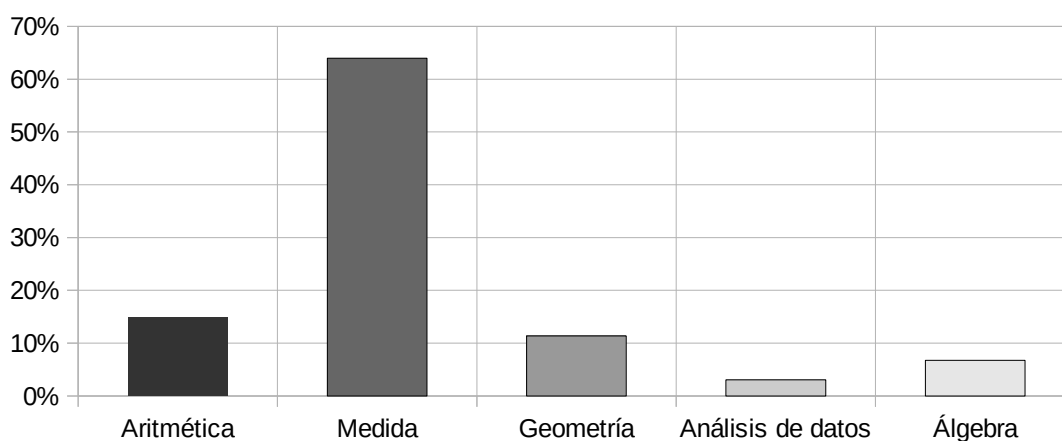


Figura 15. Porcentaje de Bloque-Capítulo (solamente valores válidos).

En cuanto al comportamiento de esta variable en cada Libro, al igual que en el caso de la variable Bloque es Medida el valor más frecuente en todos los libros, si bien el menos frecuente varía entre unos y otros. Podemos ver todos los datos en la Tabla 15 y la Figura 16.

Tabla 15
Frecuencias y porcentajes del cruce de las variables Bloque-Capítulo y Libro (solo datos válidos).

Bloque-Capítulo		Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	Total
Aritmética	Frecuencia absoluta	43	21	27	6	97
	% de la fila	44,3%	21,6%	27,8%	6,2%	100%
	% del N de la columna	16,6%	13,0%	18,4%	7,1%	14,9%
	% del N de la tabla	6,6%	3,2%	4,1%	0,9%	14,9%
Medida	Frecuencia absoluta	168	80	96	72	416
	% de la fila	40,4%	19,2%	23,1%	17,3%	100%
	% del N de la columna	64,9%	49,7%	65,3%	85,7%	63,9%
	% del N de la tabla	25,8%	12,3%	14,7%	11,1%	63,9%
Geometría	Frecuencia absoluta	20	45	6	3	74
	% de la fila	27,0%	60,8%	8,1%	4,1%	100%
	% del N de la columna	7,7%	28,0%	4,1%	3,6%	11,4%
	% del N de la tabla	3,1%	6,9%	0,9%	0,5%	11,4%
Análisis de datos	Frecuencia absoluta	11	8	1	0	20
	% de la fila	55,0%	40,0%	5,0%	0,0%	100%
	% del N de la columna	4,2%	5,0%	0,7%	0,0%	3,1%
	% del N de la tabla	1,7%	1,2%	0,2%	0,0%	3,1%
Álgebra	Frecuencia absoluta	17	7	17	3	44
	% de la fila	38,6%	15,9%	38,6%	6,8%	100%
	% del N de la columna	6,6%	4,3%	11,6%	3,6%	6,8%
	% del N de la tabla	2,6%	1,1%	2,6%	0,5%	6,8%
Total	Frecuencia absoluta	259	161	147	84	651
	% de la fila	39,8%	24,7%	22,6%	12,9%	100%
	% del N de la columna	100%	100%	100%	100%	100%
	% del N de la tabla	39,8%	24,7%	22,6%	12,9%	100%

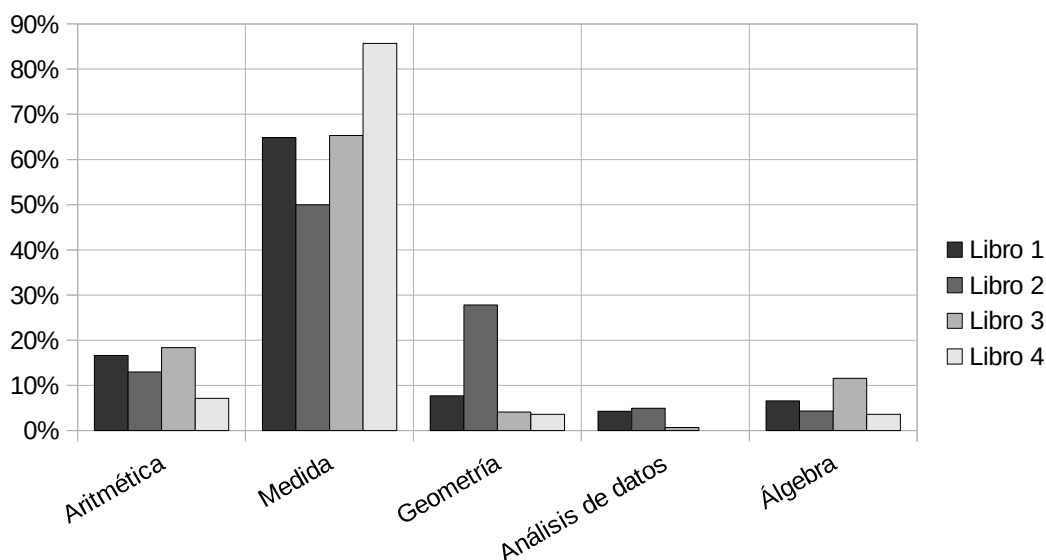


Figura 16. Porcentajes de la variable Bloque-Capítulo en cada Libro.

En el Libro 1, con 259 errores, Medida contiene 168 errores (un 64,9% de los errores del Libro, un 25,8% del total de errores válidos), mientras que la menor frecuencia corresponde a Análisis de datos con 11 errores, que suponen un 4,2% de los errores del libro y un 1,7% de los errores totales válidos.

En el Libro 2, donde se encontraron 161 errores, Medida alcanza 80 errores (un 49,7% de los errores del Libro y un 12,3% de los errores analizados válidos). El valor mínimo se encuentra en Álgebra, con 7 errores (un 4,3% de los errores del libro, es decir un 1,1% del total de errores válidos).

En el Libro 3, que presenta 147 errores, hay 96 errores de Medida, lo cual supone un 65,3% de los errores del Libro y un 14,7% de los errores totales. Por su parte, Estadística es el valor con la menor frecuencia, 1 error que supone un 0,7% de los errores del Libro y un 0,2% de los errores totales.

Por último en el Libro 4, de un total de 84 errores válidos, se encontraron 72 errores situados en un capítulo dedicado a la Medida, lo que supone un 85,7% de los errores del Libro y un 11,1% del total de errores, mientras que no se encontró ningún error en los capítulos dedicados a Análisis de datos.

8.1.4. Errores por página

El total de errores encontrados ha sido de 685. Si tenemos en cuenta que el total de páginas es de 1082, eso nos da un promedio de 0,63 errores por página.

Cuando se consideran los datos pormenorizadamente para cada Libro, observamos que el Libro 1 es el que mayor número de errores y también el que mayor promedio de errores por página posee: 259 errores en 330 páginas (0,78 errores por página). El Libro 2 es el segundo que más errores tiene, 182 en 282 páginas, que se traduce en 0,65 errores por página de promedio. Este valor es muy similar al del Libro 3, que con 147 errores en 222 páginas alberga 0,66 errores por página. Por último, el Libro 4 contiene un total de 97 errores en 241 páginas, es decir, 0,40 errores por página. Los datos se encuentra en la Tabla 16 y la Figura 17.

Tabla 16

Promedio de errores por página en cada Libro.

Libro	Número de errores	Número de páginas	Promedio
Libro 1	259	332	0,78
Libro 2	182	284	0,65
Libro 3	147	222	0,66
Libro 4	97	244	0,40
Totales	685	1082	0,63

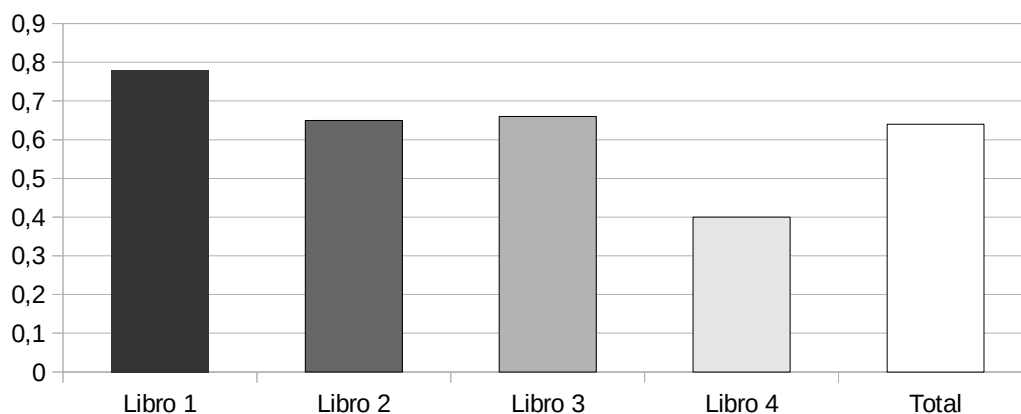


Figura 17. Promedio de errores por página en cada Libro.

Estando interesados en cómo se aglutinan los errores, descompusimos los libros en intervalos de 50 páginas para examinar la regularidad de la presencia de errores en ellos. La existencia de dos volúmenes en cada Libro, con paginado independiente (cada Volumen, A y B, comienza por la página 1), nos obligaron a crear la variable Página-Total para el estudio de la distribución por páginas de los errores.

Hay que recordar que el número total de páginas es muy irregular a lo largo de los Libros (el total oscila entre 222 y 332 páginas), por lo que los últimos bloques de 50 páginas, al no ser alcanzados por todos los libros, naturalmente mostraron menos errores.

Con estas premisas, los errores se distribuyeron de la siguiente forma. El rango con mayor número de errores es el que comprende los valores de Página-Total entre 151 y 200, con 154 errores en total. El que menos, como cabe esperar, es el último rango (valores de Página-Total de 301 a 350), pues solamente lo alcanza el Libro 1 y de forma incompleta. Como es esperable, el primer intervalo, que incluye la portada y los índices, es el segundo menos frecuente.

El hecho de que los libros tengan números de páginas muy dispares limita la información que podemos obtener de las anteriores tablas. Es por esto que, en lugar de considerar rangos absolutos de páginas, hemos considerado rangos relativos. Al dividir los libros en diez partes iguales (deciles, al contener el 10% del libro), hemos estudiado el número de errores en cada decil. Todos los datos se encuentran en la Tabla 17 y la Figura 18.

Tabla 17

Frecuencias y porcentajes del rango de Página-Total.

Rango de Página-Total	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Páginas 1-50	76	11,09%	11,09%
Páginas 51-100	93	13,58%	24,67%
Páginas 101-150	128	18,69%	43,36%
Páginas 151-200	153	22,34%	65,69%
Páginas 201-250	97	14,16%	79,85%
Páginas 251-300	106	15,47%	95,33%
Páginas 301-350	32	4,67%	100,00%
Total	685	100%	

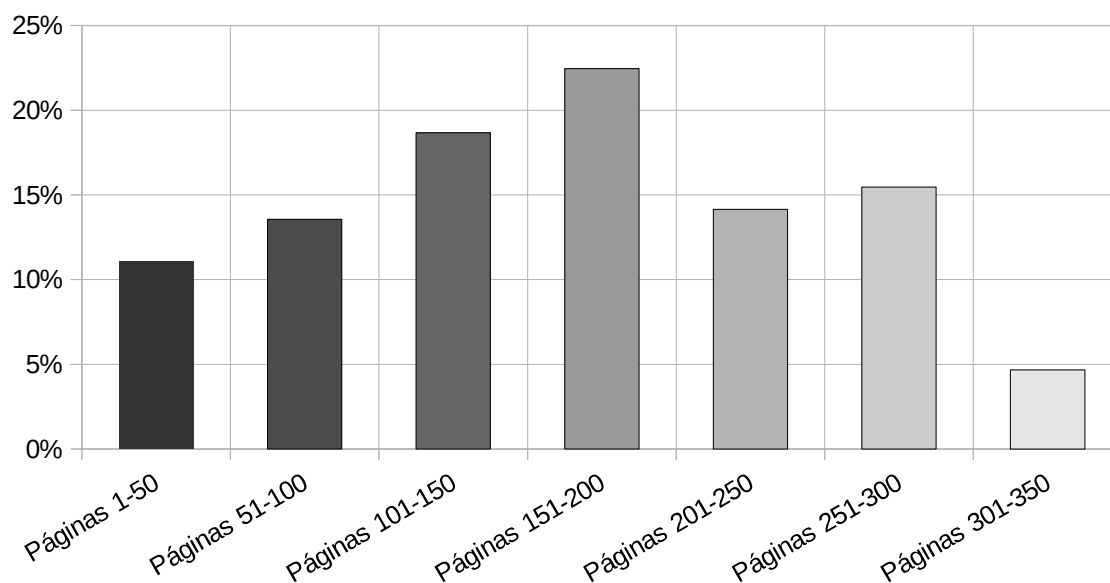


Figura 18. Porcentaje del rango de Página-Total.

Los resultados globales han sido más equilibrados que los obtenidos al estudiar los rangos. El decil con más errores ha sido el 7 (es decir, la franja del 60% al 70% del libro), con 115 errores, los cuales suponen un 16,8% del total de errores. Por el contrario, el decil con menor frecuencia ha sido el 2 (es decir, la franja del 10% al 20%), con 34 errores o lo que es lo mismo, un 4,96% de todos los errores analizados (ver Tabla 18 y Figura 19).

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

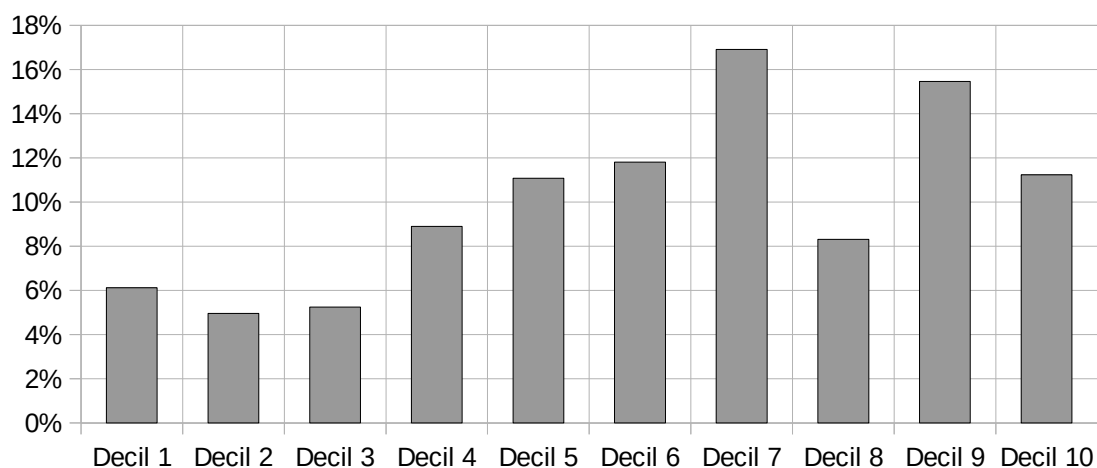


Figura 19. Frecuencia relativa (porcentaje) de los errores en cada decil.

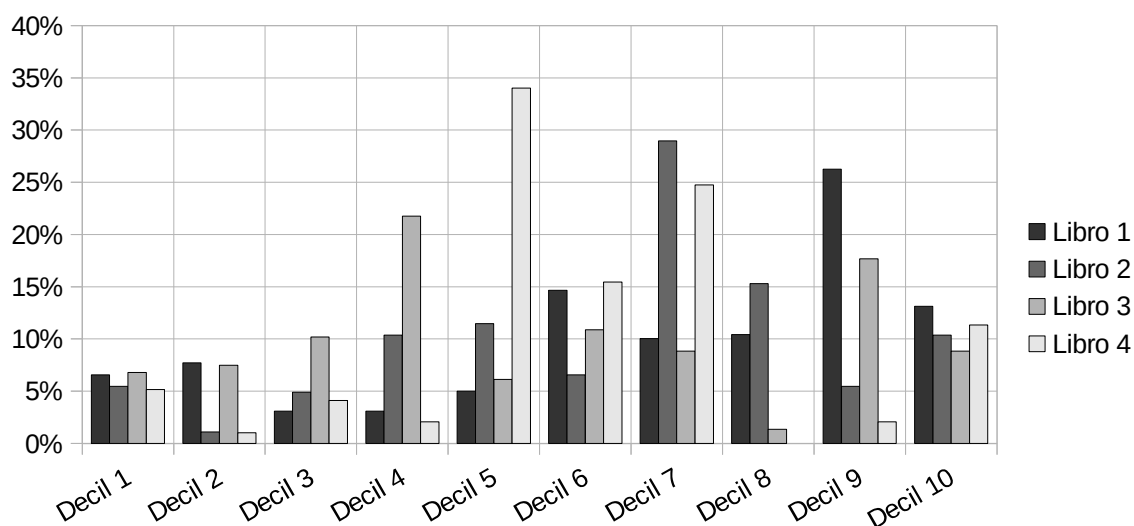


Figura 20. Porcentaje de errores de cada Libro en cada decil.

Tabla 18

Errores en cada decil (frecuencias, porcentajes y porcentajes acumulados).

Decil	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Decil 1	42	6,13%	6,13%
Decil 2	34	4,96%	11,09%
Decil 3	36	5,26%	16,35%
Decil 4	61	8,91%	25,26%
Decil 5	76	11,09%	36,35%
Decil 6	81	11,82%	48,18%
Decil 7	115	16,79%	64,96%
Decil 8	57	8,32%	73,28%
Decil 9	106	15,47%	88,76%
Decil 10	77	11,24%	100%
Total	685	100%	

Es notable que en los 5 primeros deciles se encuentra poco más que un tercio de todos los errores, mientras que los casi dos tercios restantes se acumulan en la segunda mitad de los libros.

Si hacemos el desglose por libro, el resultado es que en el Libro 1 el decil más poblado es el 9 (rango entre el 80% y 90% del Libro), con 68 errores que suponen un 26,3% de los errores del Libro. Por el contrario, los menos numerosos son los errores de los deciles 3 y 4, ambos con 8 errores cada uno (un 3,1% de los errores del Libro entero).

El Libro 2, por su parte, posee un máximo de 52 errores en el decil 7 (28,6% de los errores analizados en este Libro) y un mínimo de 2 errores en el decil 2 (1,1% del total en este Libro).

A continuación, nos encontramos que el Libro 3 tiene una mayor cantidad de errores acumulados, en total 32 (21,8% de los errores del Libro), en el decil 4, mientras que el decil con menos errores es el 8, con tan solo 2 errores (1,4% del total de errores del Libro).

Por último, en el Libro 4 el decil más poblado es el 5, con 33 errores (un 34% de los errores encontrados en el Libro), mientras que el decil 8 no cuenta con ningún error.

Los porcentajes de distribución de errores en cada libro se encuentran en la Tabla 19 y la Figura 20.

Este análisis está previsto para poner de manifiesto las regularidades o aglutinamientos de los errores en determinadas secciones proporcionales de los Libros. A primera vista, los errores no parecen distribuirse de forma regular, sino que parecen estar bastante concentrados en determinadas partes. El libro más irregular es el Libro 4, en el que los porcentajes de errores acumulados en cada decil oscilan entre el 0% y el 34%, mientras que el más uniforme es el libro 3, en el que dichos porcentajes van del 1,4% al 21,8%.

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

Tabla 19

Frecuencias y porcentajes del número de errores en cada decil, en cada Libro.

Decil	Libro 1		Libro 2		Libro 3		Libro 4		Total	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Decil 1	17	6,6%	10	5,5%	10	6,8%	5	5,2%	42	6,1%
Decil 2	20	7,7%	2	1,1%	11	7,5%	1	1,0%	34	5,0%
Decil 3	8	3,1%	9	4,9%	15	10,2%	4	4,1%	36	5,3%
Decil 4	8	3,1%	19	10,4%	32	21,8%	2	2,1%	61	8,9%
Decil 5	13	5,0%	21	11,5%	9	6,1%	33	34,0%	76	11,1%
Decil 6	38	14,7%	12	6,6%	16	10,9%	15	15,5%	81	11,8%
Decil 7	26	10,0%	52	28,6%	13	8,8%	24	24,7%	115	16,8%
Decil 8	27	10,4%	28	15,4%	2	1,4%	0	0,0%	57	8,3%
Decil 9	68	26,3%	10	5,5%	26	17,7%	2	2,1%	106	15,5%
Decil 10	34	13,1%	19	10,4%	13	8,8%	11	11,3%	77	11,2%
Total	259	100%	182	100%	147	100%	97	100%	685	100%

8.1.5. Errores por unidad de análisis

En total, entre los cuatro Libros, han sido identificadas y estudiadas 2964 unidades de análisis, en las cuales se han encontrado los 685 errores matemáticos. Esto arroja una media de 0,23 errores por unidad de análisis. Si se segrega por libros se obtienen unos valores bastante semejantes. El Libro que más errores por unidad de análisis posee es el Libro 1, con 0,26 errores de media, seguido por el Libro 4 con 0,25. El siguiente es el Libro 3, con 0,22 errores por unidad de análisis y por último el Libro 2 es el que menos errores por unidad de análisis posee, con 0,21 de media (ver Tabla 20 y Figura 21).

Tabla 20

Errores por unidad de análisis en cada Libro.

Libro	Errores	Unidades de análisis	Promedio
Libro 1	259	1012	0,26
Libro 2	182	877	0,21
Libro 3	147	682	0,22
Libro 4	97	392	0,25
Total	685	2963	0,23

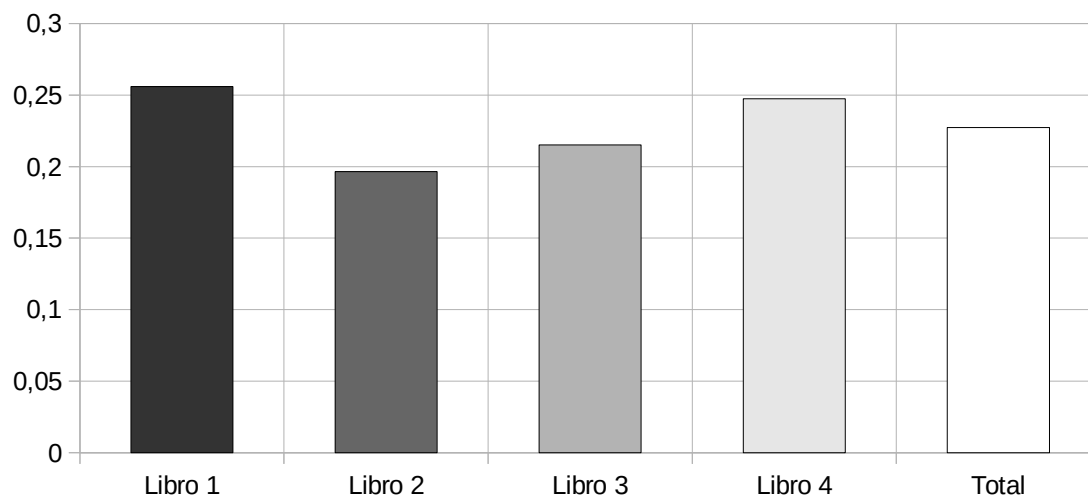


Figura 21. Promedio de errores por unidad de análisis en cada Libro y en total.

Si desglosamos los datos por Capítulos (ver Tabla 21 y Figura 22), encontramos ciertas irregularidades. En el Libro 1, el Capítulo 11 tiene un promedio mayor que los demás, con 0,54 errores por unidad de análisis, mientras que el Capítulo 4 es el que menos, con 0,1 errores por unidad de análisis.

Tabla 21
Promedio de errores por unidad de análisis por Capítulo y Libro.

Capítulo	Libro 1			Libro 2			Libro 3			Libro 4		
	E	UA	P	E	UA	P	E	UA	P	EUA	UA	P
Capítulo 1	17	107	0,16	7	32	0,22	3	25	0,12	3	31	0,10
Capítulo 2	11	67	0,16	3	43	0,07	17	82	0,21	3	21	0,14
Capítulo 3	9	58	0,16	7	114	0,06	10	114	0,09	4	39	0,10
Capítulo 4	9	87	0,10	6	89	0,07	14	61	0,23	0	25	0,00
Capítulo 5	12	108	0,11	14	33	0,42	30	43	0,70	2	32	0,06
Capítulo 6	22	136	0,16	14	86	0,16	3	68	0,04	31	33	0,94
Capítulo 7	37	92	0,40	18	65	0,28	16	55	0,29	12	26	0,46
Capítulo 8	20	83	0,24	8	90	0,09	12	57	0,21	8	19	0,42
Capítulo 9	11	46	0,24	48	33	1,45	1	16	0,06	21	25	0,84
Capítulo 10	18	57	0,32	31	112	0,28	3	58	0,05	0	14	0,00
Capítulo 11	93	171	0,54	5	55	0,09	38	104	0,37	0	12	0,00
Capítulo 12	-	-	-	3	31	0,10	-	-	-	13	115	0,11
Capítulo 13	-	-	-	18	95	0,19	-	-	-	-	-	-
Total	259	1012	0,26	182	877	0,20	147	683	0,22	97	392	0,25

Nota: E=Errores, UA=Unidades de análisis, P=Promedio

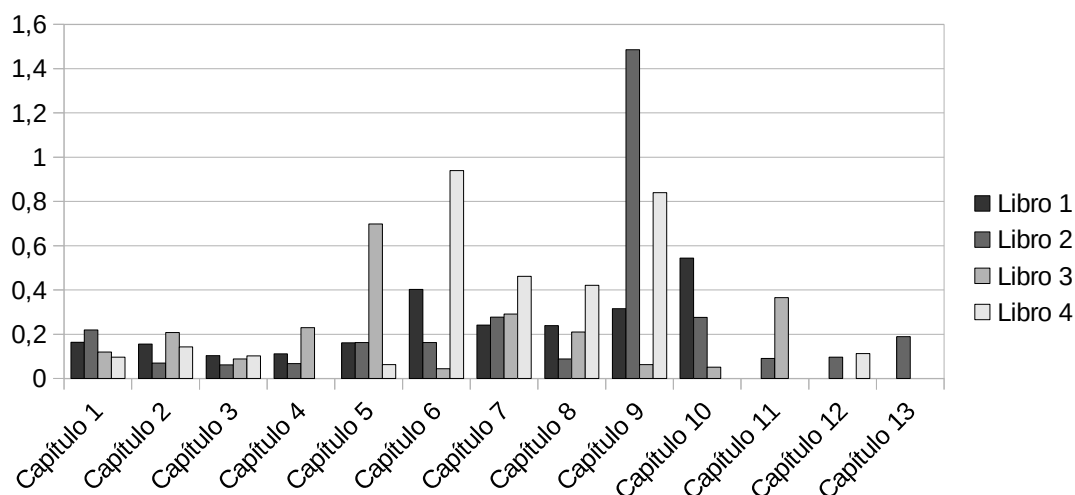


Figura 22. Promedio de errores por unidad de análisis por Capítulo y Libro.

El Libro 2 posee el capítulo con más errores por unidad de análisis de todos los Libros: el capítulo 9, con 1,45 errores por unidad de análisis. Una frecuencia media mayor que 1 es posible porque puede existir más de un error en una unidad de análisis (no es infrecuente encontrar ejercicios con dos y hasta tres errores distintos). Por el contrario, en el Capítulo 3 solamente contamos 0,06 errores por unidad de análisis.

En el Libro 3 es el Capítulo 5 el que tiene los errores más acumulados, con 0,7 errores por unidad de análisis, mientras que en el Capítulo 6 se cuentan 0,044 en promedio.

Por último, el Libro 4 tiene un máximo en el promedio de errores por unidad de análisis en el Capítulo 6, con 0,94 errores, mientras que los capítulos 4, 10 y 11 no poseen errores y por tanto el promedio es 0.

El estudio de las unidades de análisis refleja también el grado de pureza de los capítulos. Entendemos por “pureza” de un capítulo el grado de homogeneidad de los contenidos en cuanto a los valores de la variable Bloque. Así, un capítulo cuyos contenidos se reparten entre los distintos bloques a partes iguales (son homogéneos) tendrá el grado mínimo de pureza, mientras que uno en el que los contenidos pertenezcan a un mismo Bloque tendrá el mayor nivel de pureza posible. Aunque no está relacionado directamente con los errores, el estudio de las frecuencias de las unidades de análisis en cuanto a su bloque de contenidos y cómo se distribuyen en los distintos capítulos puede ayudar (y de hecho ayuda) a arrojar luz sobre algunas incógnitas que nos surgirán. Es por esto que nos interesamos por los porcentajes de unidades de análisis de cada bloque de contenido dentro de cada capítulo, los cuales se muestran en las Tablas 22, 23, 24 y 25.

Tabla 22

Proporción de unidades de análisis pertenecientes a cada Bloque, dentro de cada Capítulo del Libro 1.

Capítulo	Aritmética	Medida	Geometría	Estadística	Álgebra
1	0,26	0,02	0,02	0,03	0,67*
2	0,16	0,12	0,61*	0,03	0,07
3	0,29	0,07	0,52*	0,07	0,05
4	0,85*	0,08	0,03	0,02	0,01
5	0,8*	0,06	0,07	0,04	0,03
6	0,77*	0,11	0,06	0,04	0,01
7	0,23	0,65*	0,03	0,05	0,03
8	0,2	0,6*	0,13	0,05	0,01
9	0,28	0,2	0,02	0,5*	0
10	0,18	0,56*	0,12	0,12	0,02
11	0,37	0,55*	0,03	0,03	0,02

*: Bloque de contenidos al que se dedica el capítulo.

Tabla 23

Proporción de unidades de análisis pertenecientes a cada Bloque, dentro de cada Capítulo del Libro 2.

Capítulo	Aritmética	Medida	Geometría	Estadística	Álgebra
1	0	0	0	0	1*
2	0,81*	0	0	0	0,19
3	0,75*	0,12	0,08	0,03	0,03
4	1*	0	0	0	0
5	0	1*	0	0	0
6	0,37	0,24	0,3*	0,05	0,03
7	0	0,94*	0,06	0	0
8	0,31	0,44	0,03	0,2*	0,01
9	0	1*	0	0	0
10	0,19	0,38	0,37*	0,05	0,02
11	1*	0	0	0	0
12	0,74*	0,26	0	0	0
13	0,26	0,32	0,21	0,21	0

*: Bloque de contenidos al que se dedica el capítulo.

Tabla 24

Proporción de unidades de análisis pertenecientes a cada Bloque, dentro de cada Capítulo del Libro 3.

Capítulo	Aritmética	Medida	Geometría	Estadística	Álgebra
1	1*	0	0	0	0
2	0,16	0,05	0,01	0,01	0,77*
3	1*	0	0	0	0
4	0,92*	0	0,02	0,07	0
5	0	1*	0	0	0
6	0,13	0,15	0,7*	0	0,01
7	0,04	0,78*	0,18	0	0
8	0,25	0,74*	0,02	0	0
9	0	0	0	1*	0
10	0,14	0,09	0,74*	0,02	0,02
11	0,38	0,54*	0,03	0,03	0,02

*: Bloque de contenidos al que se dedica el capítulo.

Tabla 25

Proporción de unidades de análisis pertenecientes a cada Bloque, dentro de cada Capítulo del Libro 4.

Capítulo	Aritmética	Medida	Geometría	Estadística	Álgebra
1	0	0	0	0	1*
2	0	0	1*	0	0
3	1*	0	0	0	0
4	1*	0	0	0	0
5	1*	0	0	0	0
6	0	1*	0	0	0
7	0,04	0,88*	0,08	0	0
8	0	1*	0	0	0
9	0	1*	0	0	0
10	0	0	0	1*	0
11	0	0	1*	0	0
12	0,47	0,24	0,17	0,1	0,03

*: Bloque de contenidos al que se dedica el capítulo.

Se pueden percibir ciertas tendencias directamente, puesto que el Libro 4 tiene índices de pureza muy altos en casi todos los capítulos. Esto significa que casi todas las unidades de análisis se encuentran en capítulos dedicados a su propio Bloque de contenidos.

A continuación nos encontramos con los Libros 2 y 3, con unos niveles de pureza relativamente altos, aunque destaca el hecho de que tanto en los capítulos de Geometría como en el de Análisis de datos las unidades de registro de los Bloques correspondientes ni siquiera son mayoría. Por último tenemos el Libro 1, que a pesar de no tener índices de pureza tan bajos como llega a tener el Libro 2, en la mayor parte de los capítulos esta pureza no llega al 70%.

8.2. Clasificación de los errores matemáticos

Para dar cumplimiento al tercer objetivo de la investigación, la clasificación de los errores, en esta sección estudiaremos la distribución de los errores no en base a su posición, sino a sus características: Contexto (tipo de unidad de análisis en que se encuentra), Bloque (área de la matemática a que hace referencia la unidad de análisis), Tipo (tipo de error) y Característica (subtipo de error).

En todos los apartados se realizará el análisis sobre toda la muestra y a continuación el caso pormenorizado para cada valor de la variable Libro. Asimismo, se incluyen las tablas bivariantes y multivariantes resultado del cruce de las variables Bloque, Bloque-Capítulo, Contexto y Tipo, por parejas y también junto con los valores de la variable Libro.

8.2.1. Errores por Contexto

Recordemos que Contexto es una variable que puede tomar los valores Teoría y Problema, dependiendo de si incluye una orden o pregunta (y por tanto es un ejercicio propuesto, resuelto o semiresuelto y la variable toma el valor Problema) o si no lo hace (y por tanto estamos ante un fragmento que ofrece una información o exposición teórica, y la variable toma el valor Teoría).

Según los datos globales, de los 685 errores identificados se ha encontrado que 65 se clasifican como Teoría y los 620 restantes como Problema. Esto implica que la razón entre Problema y Teoría es 9,54 (casi diez errores de Problema por cada error de Teoría). Estos datos se encuentran en la Tabla 26 y la Figura 23.

Tabla 26
Frecuencias y porcentajes de la variable Contexto.

Contexto	Frecuencia	Porcentaje
Teoría	65	9,5%
Problema	620	90,5%
Total	685	100%

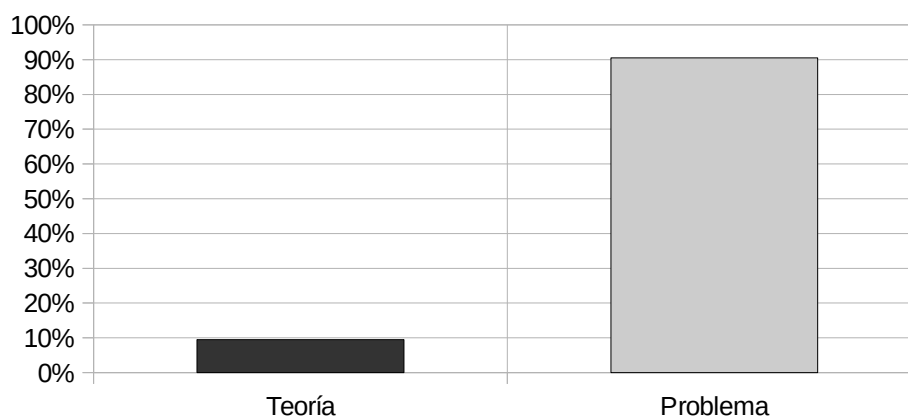


Figura 23. Porcentajes de la variable Contexto.

A priori, existe un enorme desequilibrio entre unos y otros. A continuación contextualizaremos estos datos, cruzándolos con el número de unidades de análisis de Teoría y Problema que se encuentran en los libros.

En primer lugar, si ponderamos los porcentajes brutos de cada Contexto con los porcentajes de Teoría y Problema en todas las unidades de análisis (que son un 9,41% de Teoría y un 90,59% de Problema), obtenemos un resultado muy equilibrado: un 50,23% de errores de Teoría frente a un 49,77% de errores de Problema.

Si estudiamos las proporciones de Teoría y Problema en cada uno de los libros por separado (ver Tabla 27 y Figura 24), nos encontramos con que el Libro 1 es el que tiene un mayor desequilibrio, pues al tener 8 errores de Teoría y 251 de Problema, la razón entre ambos valores asciende a 31,3 (errores de Problema por cada error de Teoría). El Libro 2 sigue teniendo un gran desequilibrio, pues tiene 15 errores de Teoría y 167 de Problema, con lo que la razón entre ambos se sitúa en 11,1. El que tiene una proporción menor de Problemas frente a errores de Teoría es el Libro 3, que asciende a 3,59 (32 errores de Teoría, 115 errores de Problema). Por último, el Libro 4 se acerca al valor anterior con 10 errores de Teoría y 87 de Problema, lo que resulta en una proporción de 8,7 errores de Problema por cada error de Teoría. El recuento de unidades de análisis por libro también nos informa sobre cuál es su Contexto, el cual se muestra en la Tabla 28.

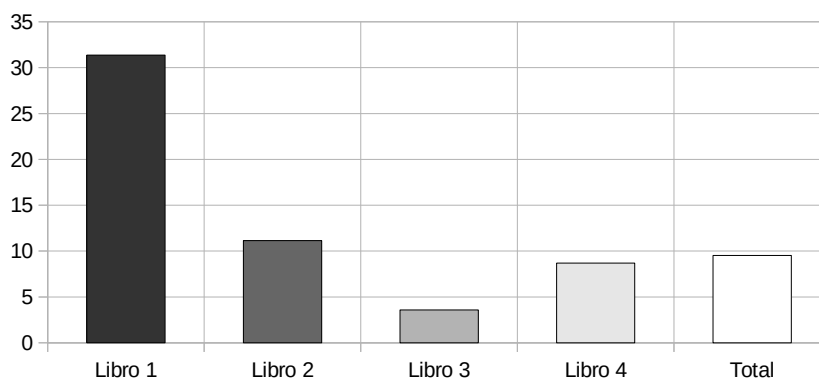


Figura 24. Proporción de Problema frente a Teoría, por Libro.

Tabla 27
Frecuencias y porcentajes de Contexto en cada Libro.

	Contexto	Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	Total
Teoría	Recuento	8	15	32	10	65
	% de Contexto	12,3%	23,1%	49,2%	15,4%	100,0%
	% de Libro	3,1%	8,2%	21,8%	10,3%	9,5%
	% del total	1,2%	2,2%	4,7%	1,5%	9,5%
Problema	Recuento	251	167	115	87	620
	% de Contexto	40,5%	26,9%	18,5%	14,0%	100,0%
	% de Libro	96,9%	91,8%	78,2%	89,7%	90,5%
	% del total	36,6%	24,4%	16,8%	12,7%	90,5%
Total	Recuento	259	182	147	97	685

Tabla 28
Contexto de las unidades de análisis totales y de cada Libro.

Contexto	Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	Total
Teoría	57	98	100	29	284
Problema	955	780	583	363	2681
Proporción	16,75	7,96	5,83	12,5	9,44
Total	1012	931	683	392	2965

Si calculamos las proporciones de los errores con Contexto Teoría con las unidades de análisis de teoría, y hacemos lo mismo con el Contexto Problema, obtenemos los datos que figuran en la Tabla 29 y la Figura 25. Ahí podemos ver que el Libro más equilibrado (esto es, aquél en el que las proporciones de errores dentro de las unidades de análisis de Teoría y las de Problemas son más similares) es el Libro 2, en el que hay 0,15 errores de Teoría por cada unidad de análisis de teoría, frente a 0,21 errores de Problema por cada unidad de análisis de problema. El siguiente es el Libro 4, donde dichas proporciones son, respectivamente, 0,34 y 0,24. Las mayores diferencias entre las proporciones de errores frente a unidades de análisis en cada valor de Contexto son el Libro 3 (0,32 y 0,2) y, sobre todo, el Libro 1 (0,04 y 0,3).

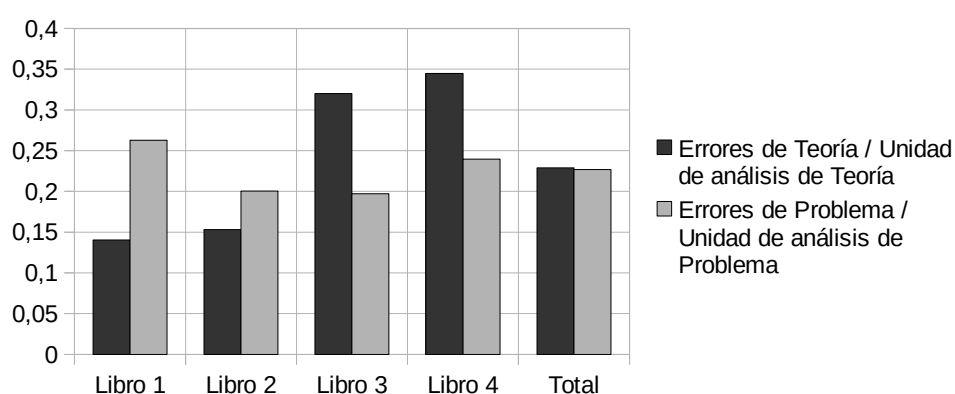


Figura 25. Proporción de errores por unidad de análisis según Contexto, en cada Libro.

Tabla 29

Proporción de errores por unidades de análisis según Contexto, en cada Libro.

Proporción Contexto/unidad de análisis	Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	Total
Proporción de errores por unidad de análisis de teoría	0,14	0,15	0,32	0,34	0,23
Proporción de errores por unidad de análisis de problema	0,26	0,21	0,20	0,24	0,23

Como podemos comprobar, las proporciones de errores entre las unidades de análisis de problema son similares en casi todos los libros (la excepción es el Libro 1). En cambio, las de los errores de contenidos teóricos sufren fuertes variaciones de un libro a otro. El resultado inicial de aparente equilibrio entre la proporción de errores de uno y otro Contexto frente a las unidades de análisis de uno y otro Contexto se pierde cuando se desglosan los cálculos por Libro. En los dos primeros la proporción es mayor entre los problemas y en los dos últimos la proporción es mayor entre los contenidos teóricos. El resultado global casualmente coincide con el equilibrio.

8.2.2. Errores por Bloque

En este apartado mostramos las frecuencias de errores matemáticos por bloque de contenidos a que se refiere la unidad de análisis en que se encuentra el error. De todos los errores matemáticos pudo identificarse inequívocamente el bloque al que pertenecían, y por tanto no se descartó ninguno.

El valor con mayor frecuencia es Medida, con un total de 441 errores de los 685 de la muestra (un 64,4% del total), mientras que Geometría tuvo la menor frecuencia, con 28 errores (4,1% del total). Los datos se muestran en la Tabla 30 y la Figura 26.

Tabla 30
Frecuencias y porcentajes de la variable Bloque.

Bloque	Frecuencia	Porcentaje
Aritmética	133	19,4%
Medida	441	64,4%
Geometría	28	4,10%
Análisis de datos	41	5,99%
Álgebra	42	6,13%
Total	685	100%

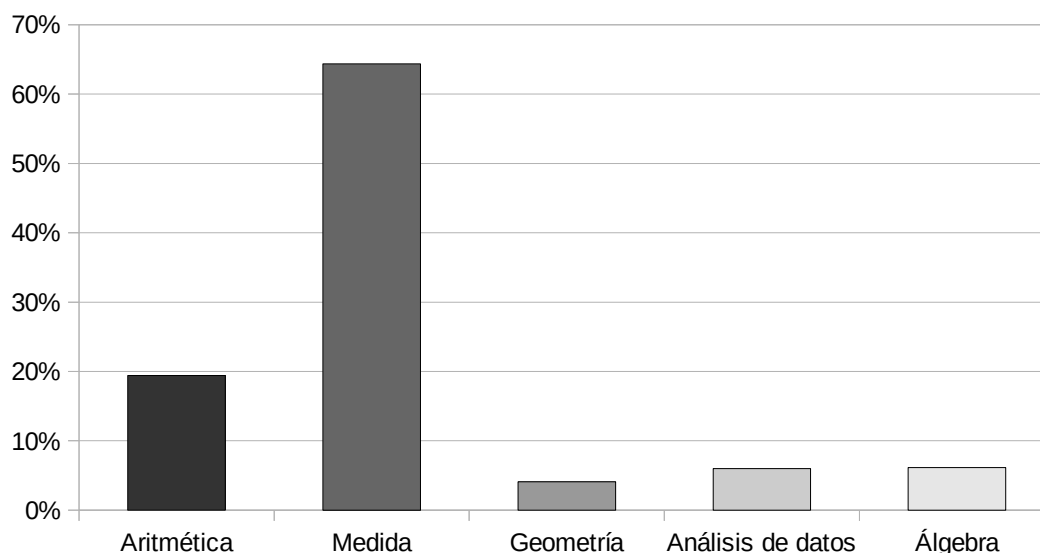


Figura 26. Porcentajes de la variable Bloque.

Dentro de cada Libro, las frecuencias se distribuyen de la forma mostrada en la Tabla 31 y la Figura 27.

Tabla 31

Frecuencias y porcentajes del cruce de las variables Bloque y Libro.

Bloque		Libro				Total
		Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	
Aritmética	Recuento	59	23	38	13	133
	% de Bloque	44,4%	17,3%	28,6%	9,8%	100%
	% de Libro	22,8%	12,6%	25,9%	13,4%	19,4%
	% del total	8,6%	3,4%	5,5%	1,9%	19,4%
Medida	Recuento	154	127	86	74	441
	% de Bloque	34,9%	28,8%	19,5%	16,8%	100%
	% de Libro	59,5%	69,8%	58,5%	76,3%	64,4%
	% del total	22,5%	18,5%	12,6%	10,8%	64,4%
Geometría	Recuento	13	4	6	5	28
	% de Bloque	46,4%	14,3%	21,4%	17,9%	100%
	% de Libro	5,0%	2,2%	4,1%	5,2%	4,1%
	% del total	1,9%	0,6%	0,9%	0,7%	4,1%
Estadística	Recuento	18	18	3	2	41
	% de Bloque	43,9%	43,9%	7,3%	4,9%	100%
	% de Libro	6,9%	9,9%	2,0%	2,1%	6,0%
	% del total	2,6%	2,6%	0,4%	0,3%	6,0%
Álgebra	Recuento	15	10	14	3	42
	% de Bloque	35,7%	23,8%	33,3%	7,1%	100%
	% de Libro	5,8%	5,5%	9,5%	3,1%	6,1%
	% del total	2,2%	1,5%	2,0%	0,4%	6,1%
Total	Recuento	259	182	147	97	685
	% de Bloque	37,8%	26,6%	21,5%	14,2%	100%
	% de Libro	100%	100%	100%	100%	100%
	% del total	37,8%	26,6%	21,5%	14,2%	100%

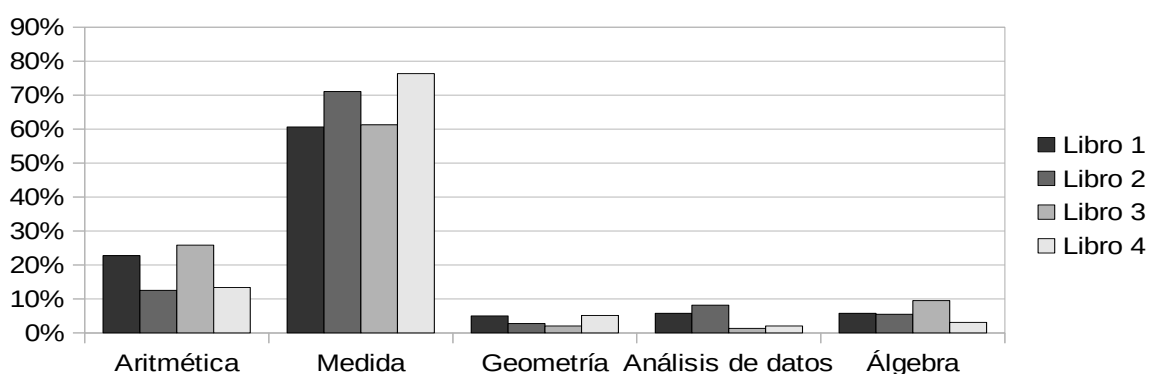


Figura 27. Porcentaje de cada valor de Bloque en cada Libro.

El Libro 1 tiene un máximo de 157 errores en Medida, lo que supone un 60,6% de los errores del libro y un 22,9% del total de errores. El mínimo se alcanza en el valor Geometría, con 13 errores en total, siendo éstos un 5% de los errores del libro y un 1,9% del total de errores encontrados.

El Libro 2 tiene el máximo de errores en Medida, con 130. Esta frecuencia se traduce en un 71,04% de los errores del Libro y un 18,95% del total de errores. El mínimo se alcanza en Geometría, donde existen un total de 5 errores (un 2,73% de los errores del Libro y un 0,73% de los errores totales).

En el Libro 3 se encontraron 90 errores en Medida, siendo ésta la frecuencia máxima y aportando un 61,22% de los errores del libro y un 13,12% de los errores totales encontrados. Por su parte, en Análisis de datos se encontró el mínimo, un total de 2 errores que suponen el 1,36% de los errores del libro y el 0,29% de los errores totales.

Por último, en el Libro 4 se cuentan 74 errores de Medida (un 76,29% de los errores del libro, y un 10,79% del total de errores analizados), siendo éste el valor máximo. El mínimo se alcanza en el valor Análisis de datos, donde 2 errores suponen el 2,06% de los errores del libro y tan solo un 0,29% de los errores totales.

Como se puede ver, Medida fue el valor que alcanzó el máximo valor en todos los libros, con un peso dentro del libro que oscila entre el 60,62% (en el Libro 1) y el 76,29% (en el Libro 4).

8.2.3. Errores por Concepto

A continuación clasificamos los errores por el concepto al que hacen referencia las unidades de análisis a las que pertenecen.

El Concepto menos frecuente fueron Mosaicos y simetría y Suma y resta de números naturales y enteros, con una ocurrencia de cada uno, lo que supone un 0,15% del total. En el otro lado de la tabla nos encontramos con Volumen del cubo y del

ortopedro, que con 201 ocurrencias tiene un 29,34% del total de errores matemáticos encontrados.

Se puede apreciar un enorme desequilibrio en las frecuencias de la variable Concepto. Todos los conceptos excepto Velocidad y Volumen del cubo y del ortopedro suman en total un 51,97% de los errores. Tan solo estos dos conceptos acumulan 329 errores, es decir, el 48,03% de los 685 errores analizados. Estos datos se encuentran en la Tabla 32 y en las Figuras 28 y 29.

Tabla 32
Frecuencias y porcentajes de la variable Concepto.

Concepto	Frecuencia	Porcentaje
Número natural y número entero (concepto)	3	0,44%
Suma y resta en naturales y enteros	1	0,15%
Producto y división en naturales y enteros	8	1,17%
Operaciones combinadas en naturales y enteros	5	0,73%
Números decimales (concepto)	2	0,29%
Producto y división de números decimales	5	0,73%
Fracciones (concepto)	3	0,44%
Suma y resta de fracciones	3	0,44%
Producto y división de fracciones	12	1,75%
Porcentaje	30	4,38%
Razón y proporción	37	5,40%
Patrones numéricos	4	0,58%
Múltiplos y divisores	5	0,73%
Raíz cuadrada	14	2,04%
Longitud, masa y volumen	5	0,73%
Área del triángulo	2	0,29%
Área, circunferencia, radio y diámetro del círculo	48	7,01%
Área y perímetro de polígonos y figuras compuestas	37	5,40%
Volumen del cubo y del ortopedro	201	29,34%
Velocidad	128	18,69%
Tiempo	11	1,61%
Dinero	11	1,61%
Ángulos	4	0,58%
Figuras geométricas y poliedros	8	1,17%
Desarrollos de poliedros	7	1,02%
Elementos del círculo	7	1,02%
Mosaicos y simetría	1	0,15%
Tablas y gráficos lineales	19	2,77%
Media aritmética	4	0,58%
Diagramas de sectores	18	2,63%
Expresiones algebraicas en una variable	42	6,13%
Total	685	100,00%

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

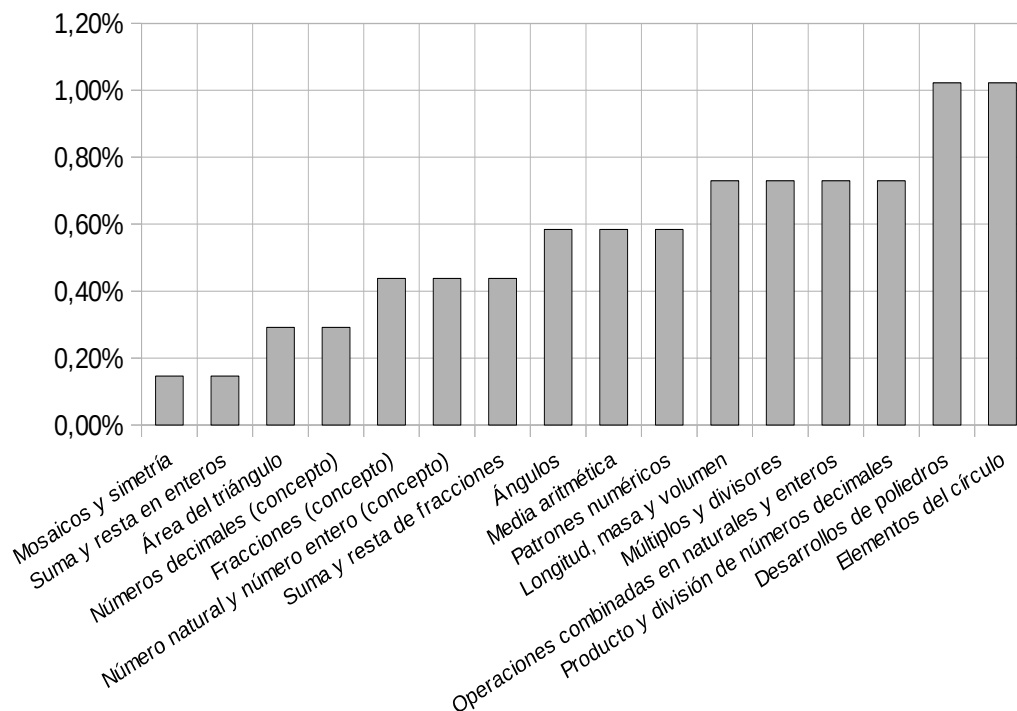


Figura 28. Porcentajes de la variable Concepto, ordenados de forma creciente (I).

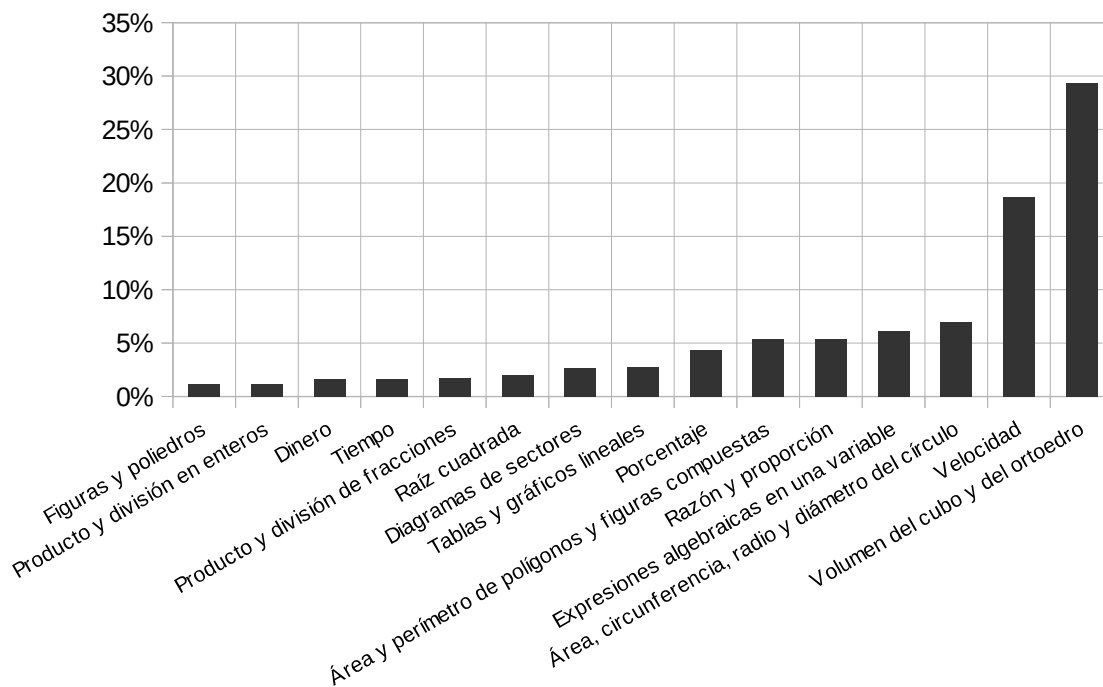


Figura 29. Porcentajes de la variable Concepto, ordenados de forma creciente (II).

8.2.4. Errores por Tipo de error

Ya conocíamos que existen cuatro valores de la variable Tipo, que clasifica los errores en supercategorías, a saber: Concepto, Omisión, Indefinición y Símbolo.

El Tipo más frecuente fue Símbolo, con un 34,9% de los errores, seguido de Omisión con un 29,5%, Indefinición con un 21,9% y por último Concepto, que se quedó con el 14,16% restante a pesar de ser la categoría de error asociada a más valores de Característica (ver Tabla 33 y Figura 30). Parece existir un cierto equilibrio, a diferencia de lo que sucedía con la variable Concepto.

Tabla 33
Frecuencias y porcentajes de la variable Tipo.

Tipo	Frecuencia	Porcentaje
Concepto	97	14,16%
Omisión	199	29,05%
Indefinición	150	21,90%
Símbolo	239	34,89%
Total	685	100,00%

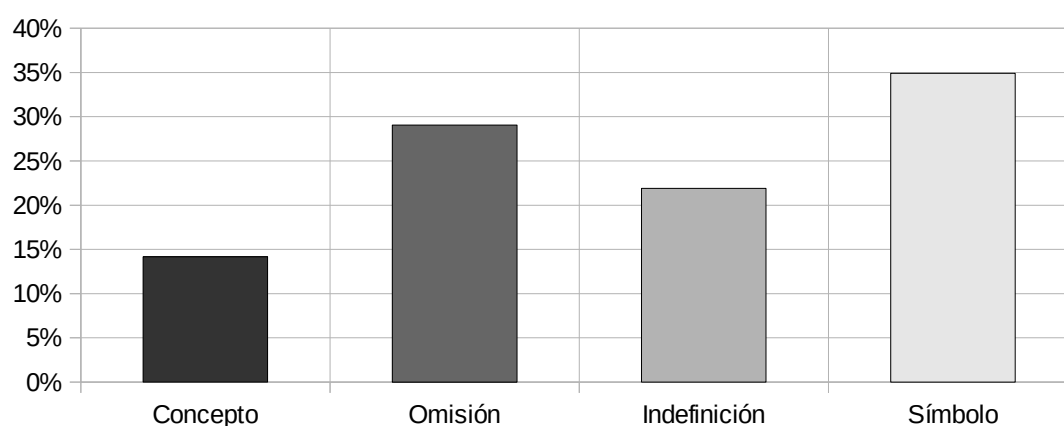


Figura 30. Porcentajes de la variable Tipo.

Estudiando lo que sucede en cada libro, podemos ver que ningún valor de la variable Tipo es predominante ni marginal en ninguno de los libros. En los Libros 1 y 2 el valor más frecuente es Omisión, con un 31,3% y un 36,3% del total de errores de cada Libro pertenecientes a este Tipo. En los Libros 3 y 4, por su parte, lo más frecuente es encontrar errores de Símbolo (un 44,9% y un 50,5% son de este Tipo, respectivamente, en los Libros 3 y 4).

En cuanto a los valores con menor frecuencia, tenemos Concepto en los Libros 1, 2 y 3, con porcentajes 11,6%, 18,1% y 10,2% respectivamente. En el Libro 4, sin embargo, el valor de Tipo menos común es Indefinición, con un 11,3% de los errores del libro.

Se puede apreciar que los Tipos de errores no solamente no están equitativamente repartidos por los Libros (lo cual es esperable porque el número de errores en cada Libro es muy diferente de los demás), sino que además cada libro reparte los Tipos de error de una forma distinta. Todos los datos se encuentran en la Tabla 34 y las Figuras 31 y 32.

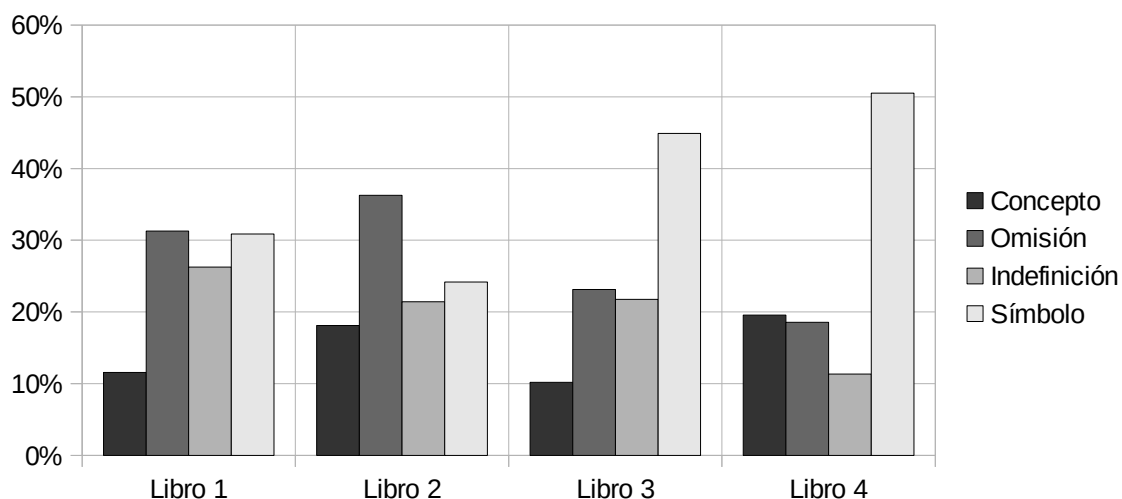


Figura 31. Porcentajes de la variable Tipo dentro de cada Libro.

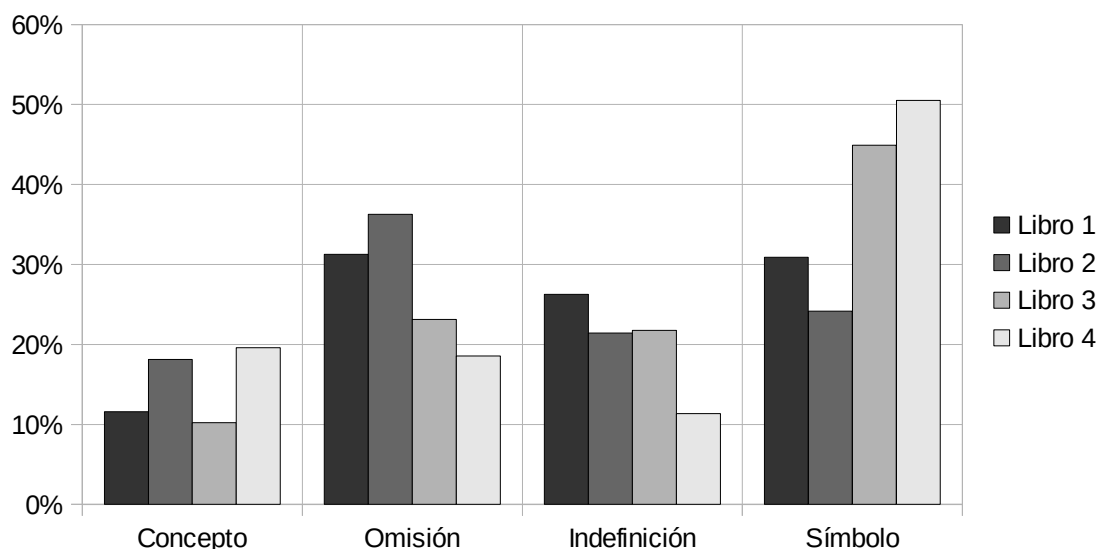


Figura 32. Porcentajes de la variable Tipo en cada Libro.

Tabla 34
Frecuencias y porcentajes de la variable Tipo en cada Libro.

	Tipo	Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	Total
Concepto	Recuento	30	33	15	19	97
	% de Tipo	30,9%	34,0%	15,5%	19,6%	100%
	% del N de Libro	11,6%	18,1%	10,2%	19,6%	14,2%
	% del N del total	4,4%	4,8%	2,2%	2,8%	14,2%
Omisión	Recuento	81	66	34	18	199
	% de Tipo	40,7%	33,2%	17,1%	9,0%	100%
	% del N de Libro	31,3%	36,3%	23,1%	18,6%	29,1%
	% del N del total	11,8%	9,6%	5,0%	2,6%	29,1%
Indefinición	Recuento	68	39	32	11	150
	% de Tipo	45,3%	26,0%	21,3%	7,3%	100%
	% del N de Libro	26,3%	21,4%	21,8%	11,3%	21,9%
	% del N del total	9,9%	5,7%	4,7%	1,6%	21,9%
Símbolo	Recuento	80	44	66	49	239
	% de Tipo	33,5%	18,4%	27,6%	20,5%	100%
	% del N de Libro	30,9%	24,2%	44,9%	50,5%	34,9%
	% del N del total	11,7%	6,4%	9,6%	7,2%	34,9%
Total	Recuento	259	182	147	97	685
	% de Tipo	37,8%	26,6%	21,5%	14,2%	100%
	% del N de Libro	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100%
	% del N del total	37,8%	26,6%	21,5%	14,2%	100%

8.2.5. Clasificación por Bloque y Bloque-Capítulo

Cruzar las variables Bloque y Bloque-Capítulo nos da una idea de cuán mezclados están los conceptos a que se refiere el error en cuestión y del capítulo en el que se ubica. Utilizaremos el término “permeabilidad” de un bloque para referirnos a la capacidad de las unidades de análisis o los errores de un determinado valor de Bloque de aparecer en capítulos dedicados a otro bloque de contenido diferente.

El valor de Bloque con menor permeabilidad es Medida, del que el 86,6% de los errores (368 de 425) se encuentran en capítulos dedicados a la Medida. El siguiente valor con menor permeabilidad es Álgebra, del que el 81% de los errores (34 de 42) se encuentran en capítulos dedicados al Álgebra. Los errores catalogados en los Bloques Aritmética y Geometría, por ese orden, tienen un nivel de permeabilidad medio, pues más de un 40% (el 41,1% para Aritmética y el 40,7% para la Geometría) se encuentran repartidos en capítulos dedicados a otras áreas de la Matemática.

Por último, el Bloque más permeable es Análisis de datos, pues solamente un 39,4% de los errores de Análisis de datos se encuentra en los capítulos dedicados al Análisis de datos. El 60,4% restante se encuentra repartido por los demás capítulos.

Desde el otro punto de vista, como cabe esperar, la mayor parte de los errores de un capítulo dedicado a un área de la matemática se clasifican dentro de ese mismo bloque. Sin embargo, hay capítulos con mayor nivel de “intrusismo” que otros, entendiendo por intrusismo la presencia en mayor o menor medida de unidades de registro o de errores pertenecientes a bloques de contenido distintos a aquél al que está dedicado el capítulo. En este sentido, pureza e intrusismo no tienen porqué ser opuestos, puesto que el mayor número de errores de un capítulo podría pertenecer a un bloque distinto al que el capítulo se dedica, teniendo entonces un capítulo con altos grados tanto de pureza como de intrusismo. Sin embargo, cuando la frecuencia de Bloque más alta coincide con el mismo Bloque-Capítulo (lo cual es el suceso más común), pureza e intrusismo son, efectivamente, opuestos. El Bloque-Capítulo más puro es Medida, en el que el 88,5% de sus errores son de Medida, seguido por Álgebra y Aritmética, con niveles de pureza muy semejantes (77,3% y 75,3% respectivamente). El siguiente Bloque-Capítulo más puro es el de Análisis de datos, en el que solamente un 65% de los errores se encuentran en su lugar natural. Por último, los capítulos que más intrusismo reciben son los dedicados a la Geometría, en los que nada más que un 21,6% de los errores son de Geometría. De hecho, hay muchos más errores de Medida en capítulos de Geometría (un 65%). Estos datos se encuentran en la Tabla 35 y las Figuras 33 y 34.

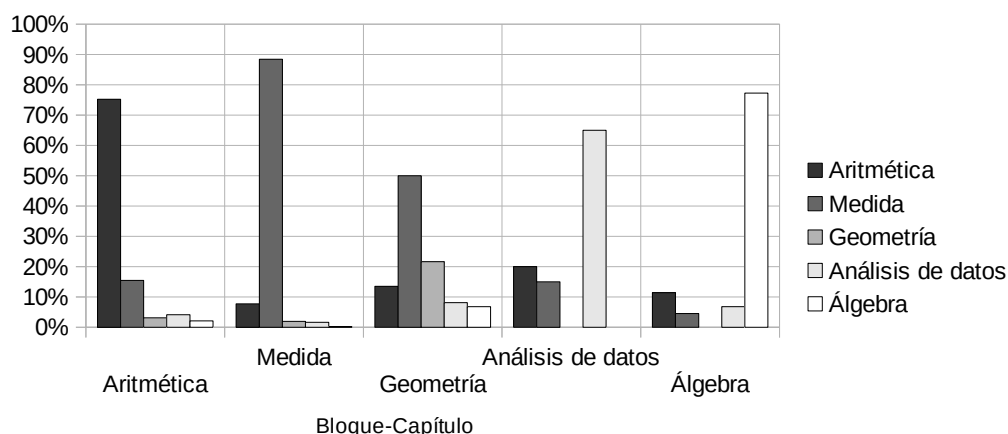


Figura 33. Composición por Bloque de los capítulos dedicados a cada bloque de contenidos.

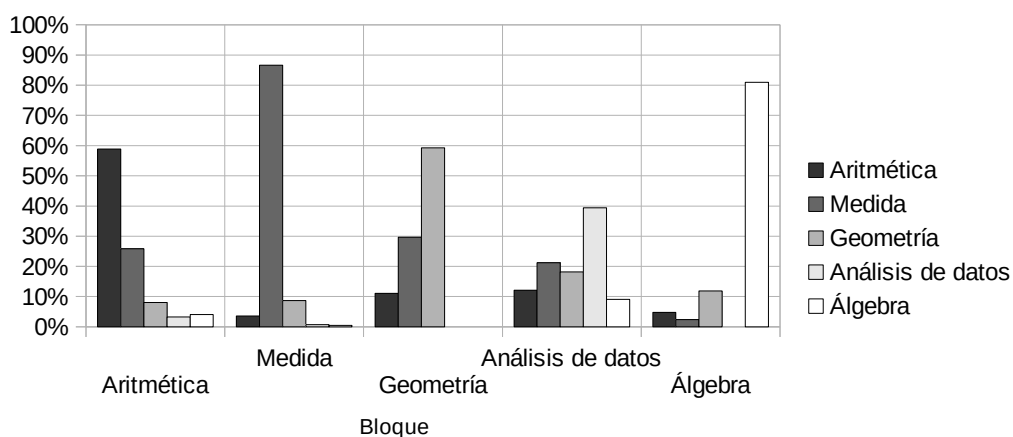


Figura 34. Distribución de los errores pertenecientes a un Bloque por Bloque-Capítulo.

Tabla 35
Cruce de las variables Bloque y Bloque-Capítulo.

Bloque-Capítulo		Bloque					
		Aritmética	Medida	Geometría	Análisis de datos	Álgebra	Total
Aritmética	Recuento	73	15	3	4	2	97
	% de Bloque-Capítulo	75,3%	15,5%	3,1%	4,1%	2,1%	100,0%
	% de Bloque	58,9%	3,5%	11,1%	12,1%	4,8%	14,9%
	% del total	11,2%	2,3%	0,5%	0,6%	0,3%	14,9%
Medida	Recuento	32	368	8	7	1	416
	% de Bloque-Capítulo	7,7%	88,5%	1,9%	1,7%	0,2%	100,0%
	% de Bloque	25,8%	86,6%	29,6%	21,2%	2,4%	63,9%
	% del total	4,9%	56,5%	1,2%	1,1%	0,2%	63,9%
Geometría	Recuento	10	37	16	6	5	74
	% de Bloque-Capítulo	13,5%	50,0%	21,6%	8,1%	6,8%	100,0%
	% de Bloque	8,1%	8,7%	59,3%	18,2%	11,9%	11,4%
	% del total	1,5%	5,7%	2,5%	0,9%	0,8%	11,4%
Análisis de datos	Recuento	4	3	0	13	0	20
	% de Bloque-Capítulo	20,0%	15,0%	0,0%	65,0%	0,0%	100,0%
	% de Bloque	3,2%	0,7%	0,0%	39,4%	0,0%	3,1%
	% del total	0,6%	0,5%	0,0%	2,0%	0,0%	3,1%
Álgebra	Recuento	5	2	0	3	34	44
	% de Bloque-Capítulo	11,4%	4,5%	0,0%	6,8%	77,3%	100,0%
	% de Bloque	4,0%	0,5%	0,0%	9,1%	81,0%	6,8%
	% del total	0,8%	,3%	0,0%	0,5%	5,2%	6,8%
Total	Recuento	124	425	27	33	42	651
	% de Bloque-Capítulo	19,0%	65,3%	4,1%	5,1%	6,5%	100,0%
	% de Bloque	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	19,0%	65,3%	4,1%	5,1%	6,5%	100,0%

Veamos ahora los resultados particulares en cada Libro. En el Libro 1, el valor de Bloque más concentrado es el de Medida, en el que el 89,6% de los errores se sitúan en capítulos dedicados a la Medida. El siguiente es el Álgebra, que baja a un 66,7%, y a continuación Geometría y Aritmética, con 53,8% y 50,8% respectivamente. El bloque con más permeabilidad es el de los errores de Análisis de datos, de los cuales existen más ocurrencias en los capítulos de Medida (un 38,9%) que en los del propio Análisis de datos (33,3%).

El nivel de pureza de los contenidos de los capítulos es máximo en los capítulos de medida, en los que el 80% de los errores se han catalogado como del Bloque

Medida. A continuación nos encontramos con Aritmética, con un 69,8% de pureza. Los siguientes son Álgebra y Análisis de datos, con sendos 58,8% y 54,5% de errores que encajan con el bloque al que pertenecen sus capítulos. Por último, los capítulos dedicados a la Geometría poseen unos elevados índices de intrusismo, pues tan solo el 35% de los errores encontrados en ellos tratan sobre geometría. Los datos se encuentran en la Tabla 36 y las Figuras 35 y 36.

Tabla 36
Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Bloque para el Libro 1.

Bloque-Capítulo		Bloque					
		Aritmética	Medida	Geometría	Análisis de datos	Álgebra	Total
Aritmética	Recuento	30	7	3	2	1	43
	% de Bloque-Capítulo	69,8%	16,3%	7,0%	4,7%	2,3%	100,0%
	% de Bloque	50,8%	4,5%	23,1%	11,1%	6,7%	16,6%
	% del total	11,6%	2,7%	1,2%	0,8%	0,4%	16,6%
Medida	Recuento	19	138	3	7	1	168
	% de Bloque-Capítulo	11,3%	82,1%	1,8%	4,2%	0,6%	100,0%
	% de Bloque	32,2%	89,6%	23,1%	38,9%	6,7%	64,9%
	% del total	7,3%	53,3%	1,2%	2,7%	0,4%	64,9%
Geometría	Recuento	4	5	7	1	3	20
	% de Bloque-Capítulo	20,0%	25,0%	35,0%	5,0%	15,0%	100,0%
	% de Bloque	6,8%	3,2%	53,8%	5,6%	20,0%	7,7%
	% del total	1,5%	1,9%	2,7%	0,4%	1,2%	7,7%
Análisis de datos	Recuento	3	2	0	6	0	11
	% de Bloque-Capítulo	27,3%	18,2%	0,0%	54,5%	0,0%	100,0%
	% de Bloque	5,1%	1,3%	0,0%	33,3%	0,0%	4,2%
	% del total	1,2%	0,8%	0,0%	2,3%	0,0%	4,2%
Álgebra	Recuento	3	2	0	2	10	17
	% de Bloque-Capítulo	17,6%	11,8%	0,0%	11,8%	58,8%	100,0%
	% de Bloque	5,1%	1,3%	0,0%	11,1%	66,7%	6,6%
	% del total	1,2%	0,8%	0,0%	0,8%	3,9%	6,6%
Total	Recuento	59	154	13	18	15	259
	% de Bloque-Capítulo	22,8%	59,5%	5,0%	6,9%	5,8%	100,0%
	% de Bloque	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	22,8%	59,5%	5,0%	6,9%	5,8%	100,0%

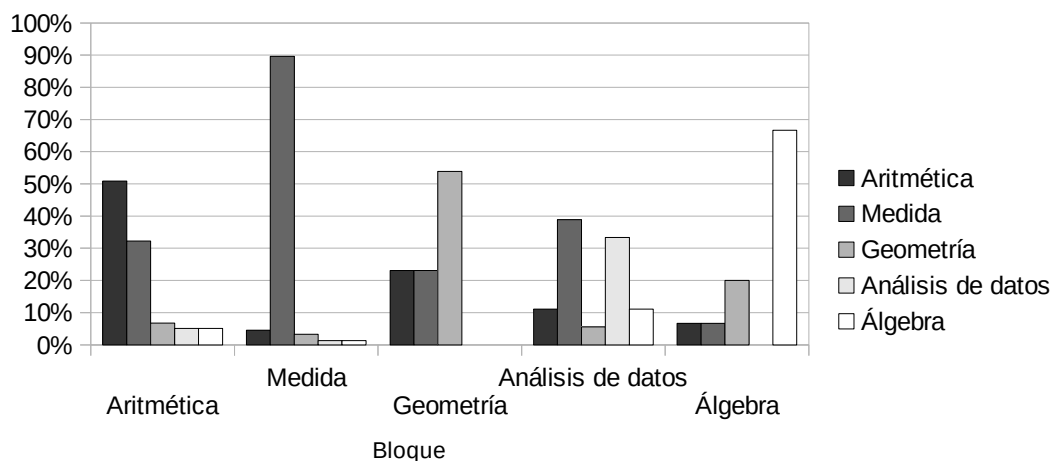


Figura 35. Distribución de los errores pertenecientes a un Bloque por Bloque-Capítulo en el Libro 1.

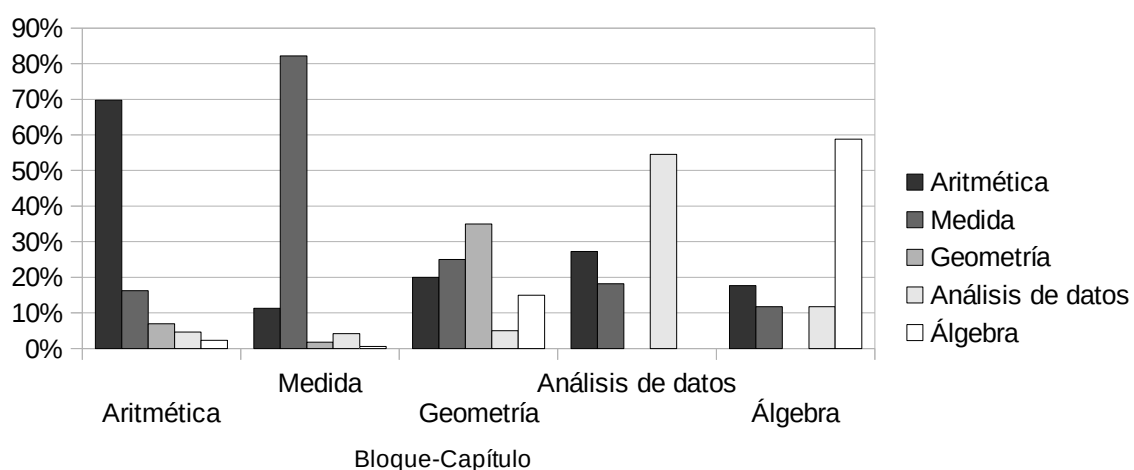


Figura 36. Composición por Bloque de los capítulos dedicados a cada bloque, en el Libro 1.

En el Libro 2, los errores del Bloque Geometría se encuentran íntegramente en los capítulos dedicados a la Geometría, es decir, el nivel de permeabilidad del Bloque Geometría es 0. Sin embargo, el resto de bloques son más permeables, pues el siguiente es Álgebra con tan solo un 70% de errores en los capítulos de Álgebra, Medida con el 66,7%, Aritmética con el 57,9% y por último Análisis de datos, con un 50% de errores en los capítulos que le corresponden (ver Tabla 37 y Figuras 37 y 38).

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

Tabla 37

Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Bloque para el Libro 2.

Bloque-Capítulo		Bloque					
		Aritmética	Medida	Geometría	Análisis de datos	Álgebra	Total
Aritmética	Recuento	11	8	0	1	1	21
	% de Bloque-Capítulo	52,4%	38,1%	0,0%	4,8%	4,8%	100,0%
	% de Bloque	57,9%	6,8%	0,0%	8,3%	10,0%	13,0%
	% del total	6,8%	5,0%	0,0%	0,6%	0,6%	13,0%
Medida	Recuento	2	78	0	0	0	80
	% de Bloque-Capítulo	2,5%	97,5%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%
	% de Bloque	10,5%	66,7%	0,0%	0,0%	0,0%	49,7%
	% del total	1,2%	48,4%	0,0%	0,0%	0,0%	49,7%
Geometría	Recuento	5	30	3	5	2	45
	% de Bloque-Capítulo	11,1%	66,7%	6,7%	11,1%	4,4%	100,0%
	% de Bloque	26,3%	25,6%	100,0%	41,7%	20,0%	28,0%
	% del total	3,1%	18,6%	1,9%	3,1%	1,2%	28,0%
Análisis de datos	Recuento	1	1	0	6	0	8
	% de Bloque-Capítulo	12,5%	12,5%	0,0%	75,0%	0,0%	100,0%
	% de Bloque	5,3%	,9%	0,0%	50,0%	0,0%	5,0%
	% del total	0,6%	0,6%	0,0%	3,7%	0,0%	5,0%
Álgebra	Recuento	0	0	0	0	7	7
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%	100,0%
	% de Bloque	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	70,0%	4,3%
	% del total	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	4,3%	4,3%
Total	Recuento	19	117	3	12	10	161
	% de Bloque-Capítulo	11,8%	72,7%	1,9%	7,5%	6,2%	100,0%
	% de Bloque	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	11,8%	72,7%	1,9%	7,5%	6,2%	100,0%

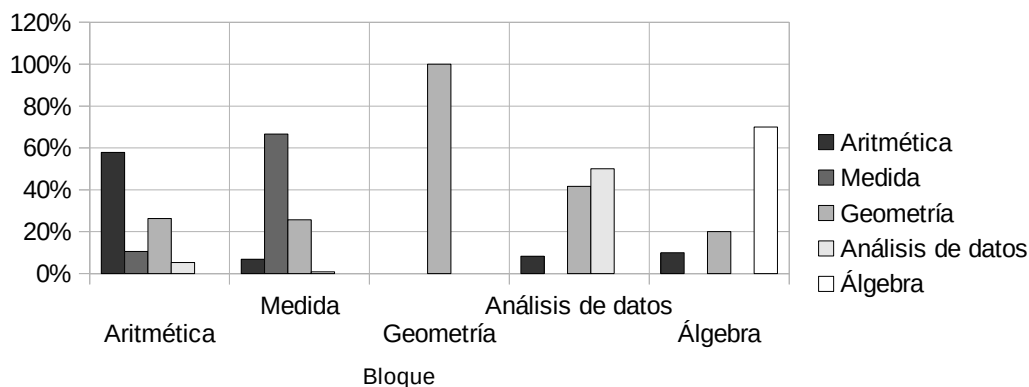


Figura 37. Distribución de los errores pertenecientes a un Bloque por Bloque-Capítulo en el Libro 2.

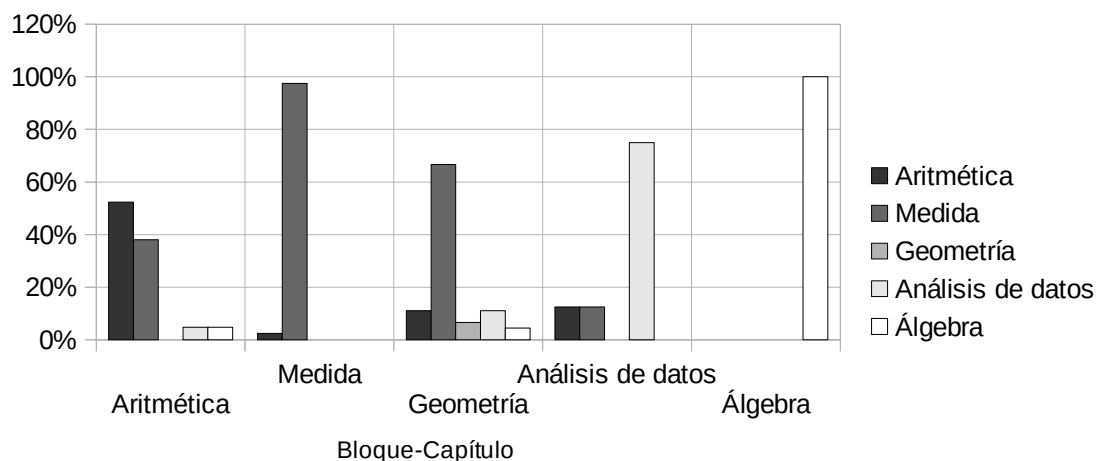


Figura 38. Composición por Bloque de los capítulos dedicados a cada bloque, en el Libro 2.

En cuanto a la pureza de los capítulos, tenemos que los dedicados al Álgebra solamente contienen errores de Álgebra y los de Medida se acercan mucho, con un 97,5%. A continuación figura Análisis de datos y Aritmética, con un 75% y un 52,4% respectivamente. Por último, el valor de Bloque-Capítulo Geometría es extraordinariamente impuro, con tan solo un 6,7% de ejercicios de Geometría (de hecho, exactamente dos tercios de los errores existentes en los capítulos dedicados a la geometría son de Medida).

El libro 3, por su parte, alcanza elevadas cotas de pureza, aunque no tanto de impermeabilidad.

Los bloques de Álgebra y Medida, en primer lugar, están prácticamente confinados en los capítulos de Álgebra (100%) y Medida (97,7%), respectivamente. A continuación tenemos Aritmética, de los que el 68,4% se encuentra en los capítulos que le son afines, mientras que los Bloques de Geometría y sobre todo Análisis de datos son muy permeables, pues solamente el 50% y el 33% respectivamente se encuentran en los capítulos que les corresponde. Es interesante resaltar, sin embargo, que la permeabilidad solamente se produce en determinados bloques. Geometría, por ejemplo, solamente permea en Medida; Análisis de datos solamente en Aritmética y Álgebra.

En cuanto a la pureza, con cuatro de las categorías por encima del 80% (Análisis de datos: 100%; Aritmética: 96,3%; Medida: 87,5%; Álgebra: 82,4%) podemos decir que los capítulos tienen un elevado nivel de pureza, excepto los dedicados a Geometría, en los que el 50% de los errores pertenecen a otras áreas. Todos estos datos se encuentran en la Tabla 38 y en las Figuras 39 y 40.

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

Tabla 38

Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Bloque para el Libro 3.

Bloque-Capítulo		Bloque					Total
		Aritmética	Medida	Geometría	Análisis de datos	Álgebra	
Aritmética	Recuento	26	0	0	1	0	27
	% de Bloque-Capítulo	96,3%	0,0%	0,0%	3,7%	0,0%	100,0%
	% de Bloque	68,4%	0,0%	0,0%	33,3%	0,0%	18,4%
	% del total	17,7%	0,0%	0,0%	0,7%	0,0%	18,4%
Medida	Recuento	9	84	3	0	0	96
	% de Bloque-Capítulo	9,4%	87,5%	3,1%	0,0%	0,0%	100,0%
	% de Bloque	23,7%	97,7%	50,0%	0,0%	0,0%	65,3%
	% del total	6,1%	57,1%	2,0%	0,0%	0,0%	65,3%
Geometría	Recuento	1	2	3	0	0	6
	% de Bloque-Capítulo	16,7%	33,3%	50,0%	0,0%	0,0%	100,0%
	% de Bloque	2,6%	2,3%	50,0%	0,0%	0,0%	4,1%
	% del total	0,7%	1,4%	2,0%	0,0%	0,0%	4,1%
Análisis de datos	Recuento	0	0	0	1	0	1
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	100,0%
	% de Bloque	0,0%	0,0%	0,0%	33,3%	0,0%	,7%
	% del total	0,0%	0,0%	0,0%	0,7%	0,0%	0,7%
Álgebra	Recuento	2	0	0	1	14	17
	% de Bloque-Capítulo	11,8%	0,0%	0,0%	5,9%	82,4%	100,0%
	% de Bloque	5,3%	0,0%	0,0%	33,3%	100,0%	11,6%
	% del total	1,4%	0,0%	0,0%	0,7%	9,5%	11,6%
Total	Recuento	38	86	6	3	14	147
	% de Bloque-Capítulo	25,9%	58,5%	4,1%	2,0%	9,5%	100,0%
	% de Bloque	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	25,9%	58,5%	4,1%	2,0%	9,5%	100,0%

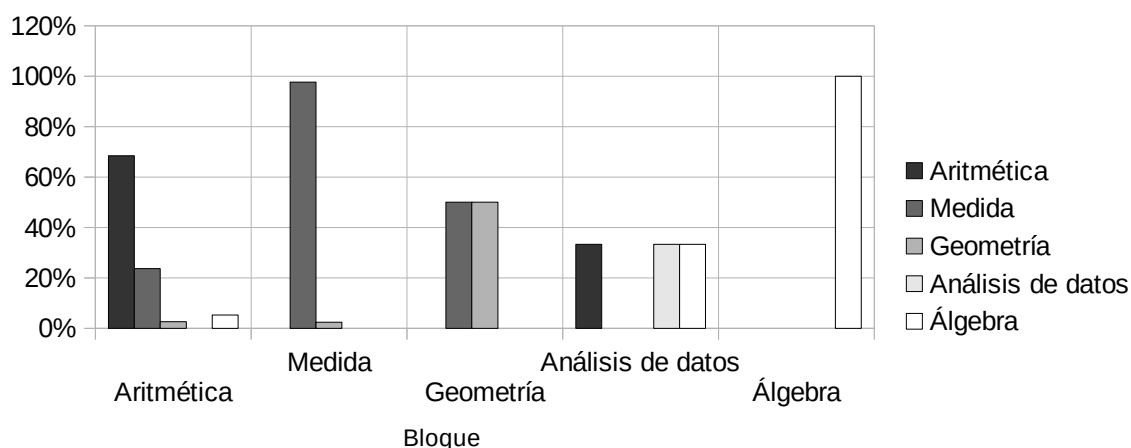


Figura 39. Distribución de los errores pertenecientes a un Bloque por Bloque-Capítulo en el Libro 3.

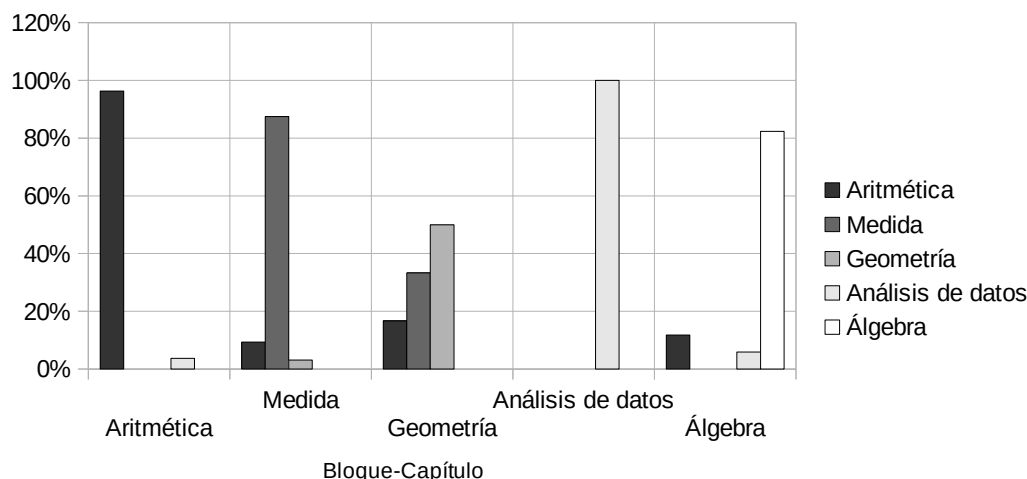


Figura 40. Composición por Bloque de los capítulos dedicados a cada bloque, en el Libro 3.

Por último, en el Libro 4, la escasez de errores y sobre todo su falta de variación (no existen errores de Análisis de datos, y más del 80% de los errores pertenecen al Bloque Medida, como ya hemos visto), hacen que sea el libro con menor permeabilidad y mayor pureza (ver Tabla 39 y Figuras 41 y 42).

En cuanto a la permeabilidad, los bloques de Álgebra y Medida se encuentran íntegramente en los capítulos dedicados a dichas áreas. A continuación tenemos Aritmética, con un 75% de sus errores en los capítulos correspondientes, y por último Geometría con un 60%.

La pureza, por su parte, es muy elevada. Los capítulos dedicados a Aritmética, Geometría y Álgebra solamente contienen errores de su bloque correspondiente, y los de Medida, que son los únicos que presentan errores intrusos, conservan un 94,4% de errores de su área.

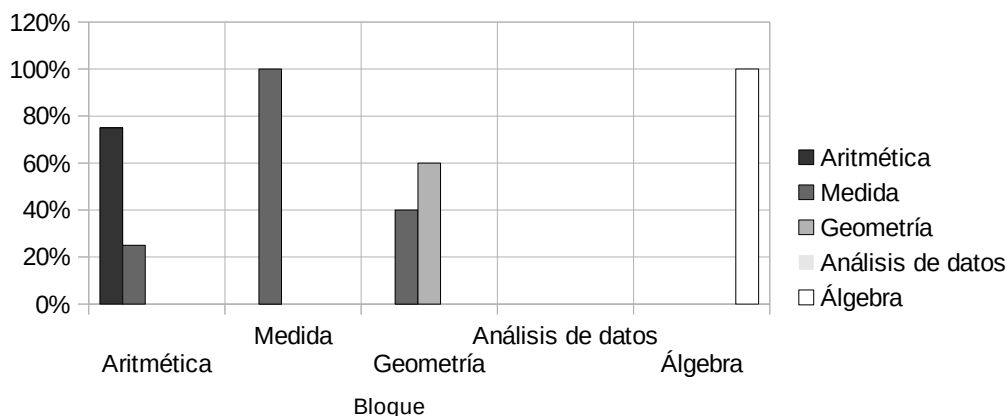


Figura 41. Distribución de los errores pertenecientes a un Bloque por Bloque-Capítulo en el Libro 4.

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

Tabla 39

Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Bloque para el Libro 4.

Bloque-Capítulo		Bloque					Total
		Aritmética	Medida	Geometría	Análisis de datos	Álgebra	
Aritmética	Recuento	6	0	0	0	0	6
	% de Bloque-Capítulo	100,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%
	% de Bloque	75,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	7,1%
	% del total	7,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	7,1%
Medida	Recuento	2	68	2	0	0	72
	% de Bloque-Capítulo	2,8%	94,4%	2,8%	0,0%	0,0%	100,0%
	% de Bloque	25,0%	100,0%	40,0%	0,0%	0,0%	85,7%
	% del total	2,4%	81,0%	2,4%	0,0%	0,0%	85,7%
Geometría	Recuento	0	0	3	0	0	3
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%
	% de Bloque	0,0%	0,0%	60,0%	0,0%	0,0%	3,6%
	% del total	0,0%	0,0%	3,6%	0,0%	0,0%	3,6%
Análisis de datos	Recuento	0	0	0	0	0	0
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	% de Bloque	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	% del total	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Álgebra	Recuento	0	0	0	0	3	3
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%	100,0%
	% de Bloque	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%	3,6%
	% del total	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	3,6%	3,6%
Total	Recuento	8	68	5	0	3	84
	% de Bloque-Capítulo	9,5%	81,0%	6,0%	0,0%	3,6%	100,0%
	% de Bloque	100,0%	100,0%	100,0%	0,0%	100,0%	100,0%
	% del total	9,5%	81,0%	6,0%	0,0%	3,6%	100,0%

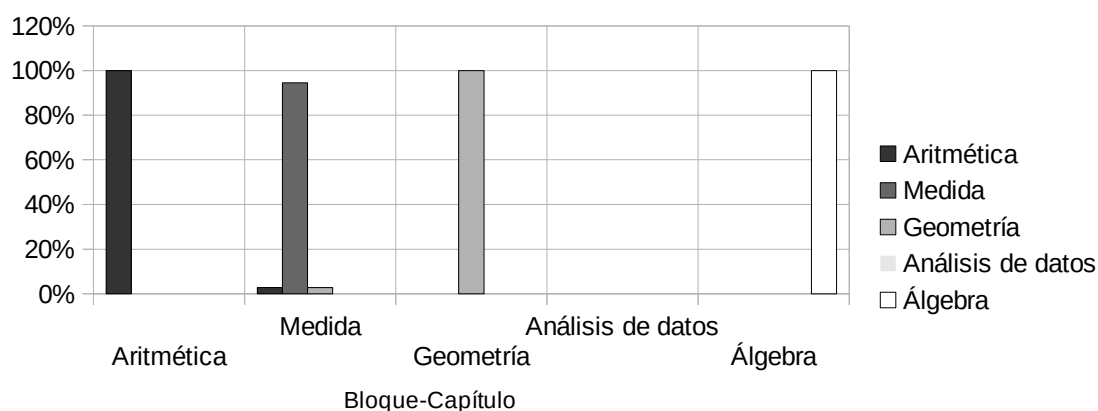


Figura 42. Composición por Bloque de los capítulos dedicados a cada bloque, en el Libro 4.

8.2.6. Clasificación por Bloque de contenido y Contexto

Ya vimos antes que las frecuencias de los valores de la variable Contexto son muy dispares tanto en la muestra completa como en cada Libro. En este apartado comprobamos esa misma tendencia cruzando las variables Bloque y Contexto.

Las frecuencias de Teoría y Problema en las áreas Aritmética, Medida, Análisis de datos y Álgebra son relativamente parecidas a las frecuencias de Teoría y Problema en la muestra entera, que se acercaban al 10%-90%. Sin embargo, Análisis de datos aumenta la diferencia entre ambos valores (2,4% para Teoría frente a 97,6% para Problemas). En Geometría prácticamente se igualan las proporciones: 46,4% de Teoría y 53,6% de Problemas.

En cuanto a qué bloque de contenidos tienen asociados los errores de Teoría y de Problemas, no hay sorpresas. En ambos casos la mayoría de errores se encuentran en Medida (65,5% para Teoría, 57,6% para Problema), seguidos por Aritmética (12,3% para Teoría y 20,2% para Problema). En cuanto al mínimo, para los errores de Teoría éste se encuentra en Análisis de datos, mientras que en Problema es en Geometría. Si ponderamos los valores por el número de errores de cada Bloque, obtenemos las frecuencias de error en cada Tipo para cada Contexto. En el caso de Teoría, la mayor frecuencia la encontramos en Geometría, con un 58,2%. A continuación tenemos Álgebra, con un 20,9% y Medida, con un 10,2%. Por último, los Bloques con menos propensión a errores de Teoría son Aritmética, con un 7,5% y Análisis de datos con un 3,1%.

Los Problemas, sin embargo, están mucho más equilibrados. Los cuatro primeros bloques poseen frecuencias muy similares: Análisis de datos (23,2%), Aritmética (22,4%), Medida (21,9%) y Álgebra (19,8%). El quinto bloque, Geometría, se muestra el más fiable con tan solo un 12,7%.

Todos estos datos se pueden ver en la Tabla 40 y en las Figuras 43 y 44, a continuación.

Errorres matemáticos en libros de texto de Singapur

Tabla 40

Cruce de las variables Bloque y Contexto.

Bloque		Contexto		
		Teoría	Problema	Total
Aritmética	Recuento	8	125	133
	% de Bloque	6,0%	94,0%	100,0%
	% de Contexto	12,3%	20,2%	19,4%
	% del total	1,2%	18,2%	19,4%
Medida	Recuento	36	405	441
	% de Bloque	8,2%	91,8%	100,0%
	% de Contexto	55,4%	65,3%	64,4%
	% del total	5,3%	59,1%	64,4%
Geometría	Recuento	13	15	28
	% de Bloque	46,4%	53,6%	100,0%
	% de Contexto	20,0%	2,4%	4,1%
	% del total	1,9%	2,2%	4,1%
Análisis de datos	Recuento	1	40	41
	% de Bloque	2,4%	97,6%	100,0%
	% de Contexto	1,5%	6,5%	6,0%
	% del total	0,1%	5,8%	6,0%
Álgebra	Recuento	7	35	42
	% de Bloque	16,7%	83,3%	100,0%
	% de Contexto	10,8%	5,6%	6,1%
	% del total	1,0%	5,1%	6,1%
Total	Recuento	65	620	685
	% de Bloque	9,5%	90,5%	100,0%
	% de Contexto	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	9,5%	90,5%	100,0%

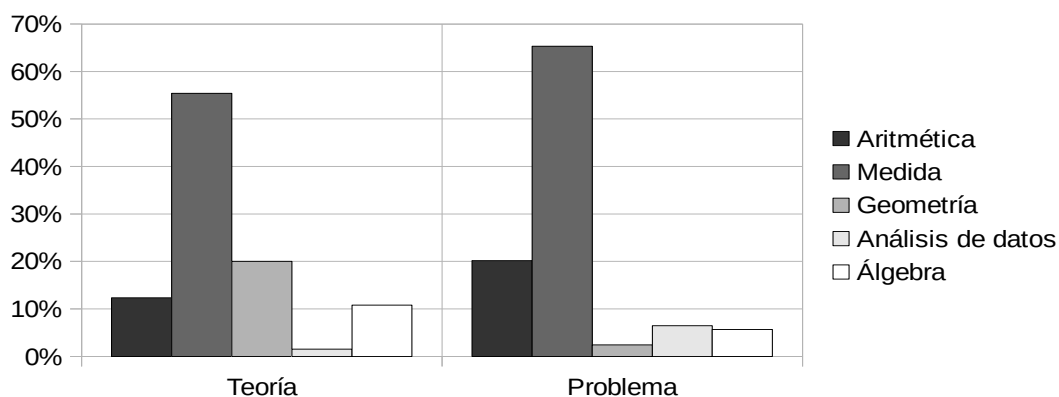


Figura 43: Frecuencias de Bloque por valores de Contexto.

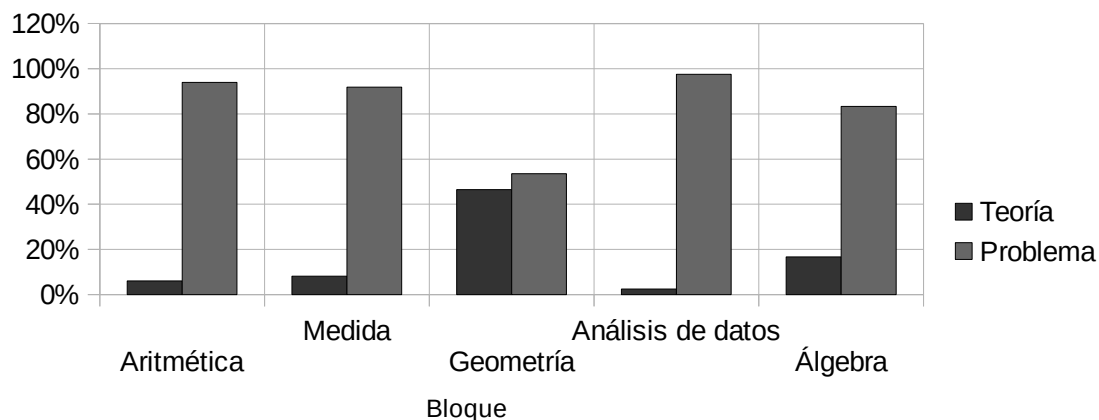


Figura 44: Frecuencias de Contexto por valores de Bloque.

El Libro 1 (ver Tabla 41 y Figuras 45 y 46) tiene de particular que carece de errores de Teoría en los Bloques de Análisis de datos y Álgebra. En el Bloque de Geometría encontramos un 46,2% de presencia de errores de Teoría, muy similar a la frecuencia de la muestra completa. Sin embargo, en el resto de bloques de contenido los errores de Problema suponen una marcada mayoría. En Medida suponen el 99,4%, y en Aritmética un 98,3%.

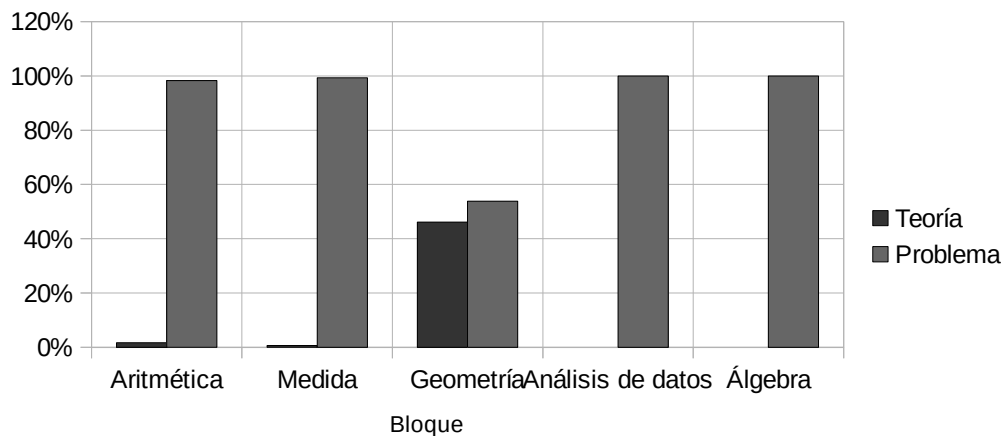


Figura 45: Frecuencias de Contexto por valores de Bloque en el Libro 1.

En cuanto a la composición de los valores de Contexto, en Teoría este libro se desmarca del resto al poseer una mayoría de errores de Geometría (un 75%), formándose la minoría con Aritmética y Medida (12,5% cada una). Los problemas se distribuyen de forma muy parecida a como tenemos en la muestra completa: 61,0% en Medida, 23,1% en Aritmética, 7,2% en Análisis de datos, 6,0% en Álgebra y 2,8% en Geometría.

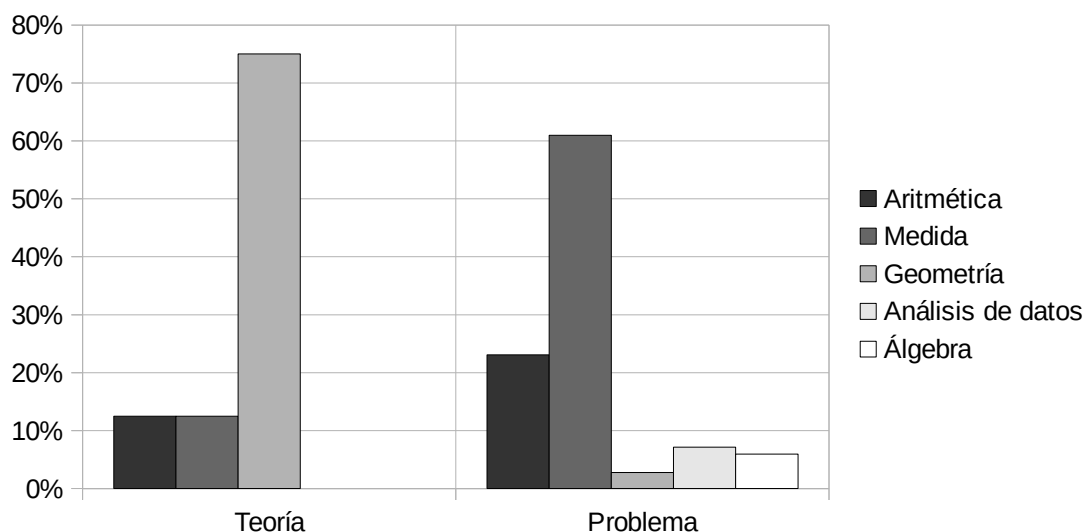


Figura 46: Frecuencias de Bloque por valores de Contexto en el Libro 1.

Tabla 41
Cruce de las variables Bloque y Contexto en el Libro 1.

Bloque		Contexto		
		Teoría	Problema	Total
Aritmética	Recuento	1	58	59
	% de Bloque	1,7%	98,3%	100,0%
	% de Contexto	12,5%	23,1%	22,8%
	% del total	0,4%	22,4%	22,8%
Medida	Recuento	1	153	154
	% de Bloque	0,6%	99,4%	100,0%
	% de Contexto	12,5%	61,0%	59,5%
	% del total	0,4%	59,1%	59,5%
Geometría	Recuento	6	7	13
	% de Bloque	46,2%	53,8%	100,0%
	% de Contexto	75,0%	2,8%	5,0%
	% del total	2,3%	2,7%	5,0%
Análisis de datos	Recuento	0	18	18
	% de Bloque	0,0%	100,0%	100,0%
	% de Contexto	0,0%	7,2%	6,9%
	% del total	0,0%	6,9%	6,9%
Álgebra	Recuento	0	15	15
	% de Bloque	0,0%	100,0%	100,0%
	% de Contexto	0,0%	6,0%	5,8%
	% del total	0,0%	5,8%	5,8%
Total	Recuento	8	251	259
	% de Bloque	3,1%	96,9%	100,0%
	% de Contexto	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	3,1%	96,9%	100,0%

El Libro 2 se caracteriza por una menor proporción de errores de Teoría en todas las áreas, incluso Geometría (25%). En orden descendente se encuentran Álgebra (20%), Aritmética (17,4%) y Medida (6,3%). Los datos se encuentran en la Tabla 42 y las Figuras 47 y 48.

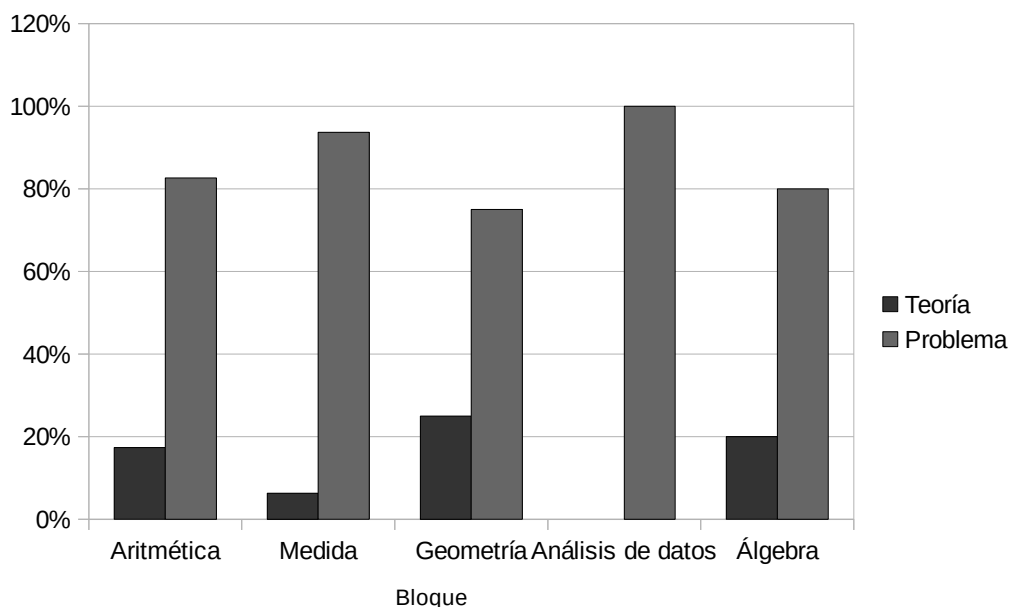


Figura 47: Frecuencias de Contexto por valores de Bloque en el Libro 2.

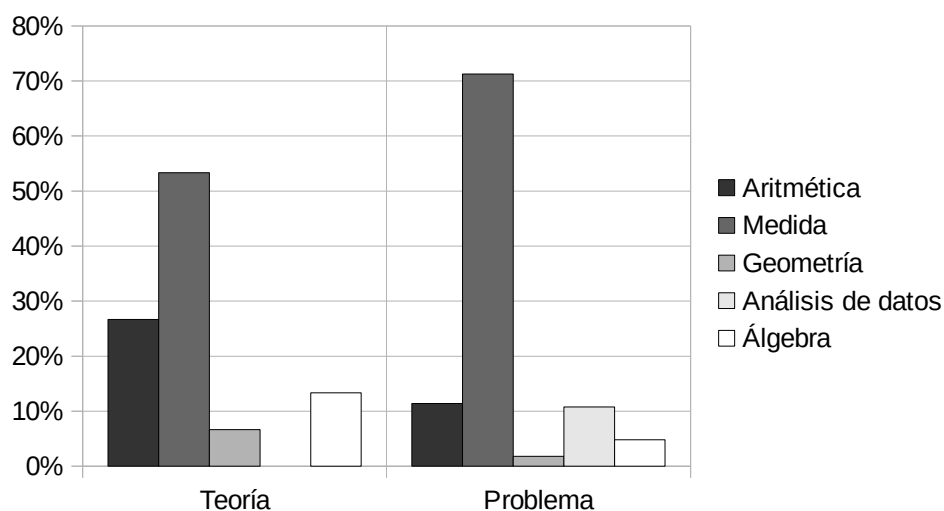


Figura 48: Frecuencias de Bloque por valores de Contexto en el Libro 2.

Por su parte, la composición por Bloques de los errores de Teoría es mayoritariamente de Medida con un 53,3% de los casos, seguida por Aritmética con un 26,7%, Álgebra con un 13,3% y por último Geometría con un 6,7%. Este Libro no tiene errores de Teoría en Análisis de datos.

Tabla 42

Cruce de las variables *Bloque* y *Contexto* en el Libro 2.

	Bloque	Contexto		
		Teoría	Problema	Total
Aritmética	Recuento	4	19	23
	% de Bloque	17,4%	82,6%	100,0%
	% de Contexto	26,7%	11,4%	12,6%
	% del total	2,2%	10,4%	12,6%
Medida	Recuento	8	119	127
	% de Bloque	6,3%	93,7%	100,0%
	% de Contexto	53,3%	71,3%	69,8%
	% del total	4,4%	65,4%	69,8%
Geometría	Recuento	1	3	4
	% de Bloque	25,0%	75,0%	100,0%
	% de Contexto	6,7%	1,8%	2,2%
	% del total	0,5%	1,6%	2,2%
Análisis de datos	Recuento	0	18	18
	% de Bloque	0,0%	100,0%	100,0%
	% de Contexto	0,0%	10,8%	9,9%
	% del total	0,0%	9,9%	9,9%
Álgebra	Recuento	2	8	10
	% de Bloque	20,0%	80,0%	100,0%
	% de Contexto	13,3%	4,8%	5,5%
	% del total	1,1%	4,4%	5,5%
Total	Recuento	15	167	182
	% de Bloque	8,2%	91,8%	100,0%
	% de Contexto	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	8,2%	91,8%	100,0%

En el Libro 3 se da el único caso de errores de Teoría que superan a los de Problema. En Geometría suponen un 66,7%, en Análisis de datos un 33,3%, en Álgebra un 28,6%, en Medida un 23,3% y por último, con un gran parecido con la muestra completa, en Aritmética un 7,9% (ver Tabla 43 y Figuras 49 y 50).

Los errores de Teoría se componen de elementos pertenecientes a Medida en un 62,5% de los casos y muy por debajo, de Geometría y Álgebra con un 12,5% por cada uno, Aritmética con un 9,4% y finalmente Análisis de datos, con un 3,1%. Los Problemas, por su parte, son de Medida en un 57,4%, de Aritmética en un 30,4% de Álgebra en un 8,7% y por último de Geometría y Análisis de datos en un 1,7% cada uno.

Tabla 43
Cruce de las variables Bloque y Contexto en el Libro 3.

Bloque		Contexto		
		Teoría	Problema	Total
Aritmética	Recuento	3	35	38
	% de Bloque	7,9%	92,1%	100,0%
	% de Contexto	9,4%	30,4%	25,9%
	% del total	2,0%	23,8%	25,9%
Medida	Recuento	20	66	86
	% de Bloque	23,3%	76,7%	100,0%
	% de Contexto	62,5%	57,4%	58,5%
	% del total	13,6%	44,9%	58,5%
Geometría	Recuento	4	2	6
	% de Bloque	66,7%	33,3%	100,0%
	% de Contexto	12,5%	1,7%	4,1%
	% del total	2,7%	1,4%	4,1%
Análisis de datos	Recuento	1	2	3
	% de Bloque	33,3%	66,7%	100,0%
	% de Contexto	3,1%	1,7%	2,0%
	% del total	0,7%	1,4%	2,0%
Álgebra	Recuento	4	10	14
	% de Bloque	28,6%	71,4%	100,0%
	% de Contexto	12,5%	8,7%	9,5%
	% del total	2,7%	6,8%	9,5%
Total	Recuento	32	115	147
	% de Bloque	21,8%	78,2%	100,0%
	% de Contexto	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	21,8%	78,2%	100,0%

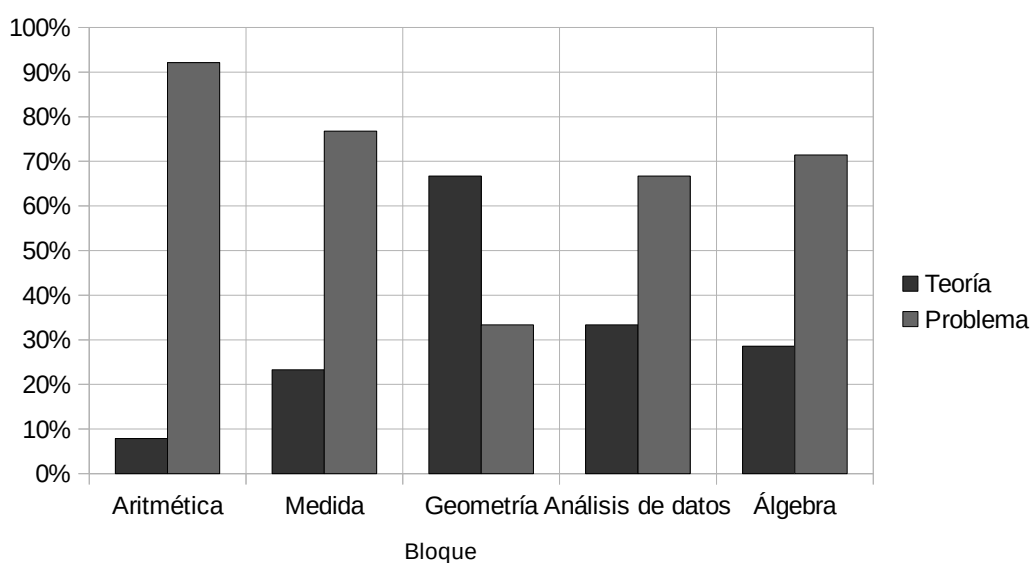


Figura 49: Frecuencias de Contexto por valores de Bloque en el Libro 3.

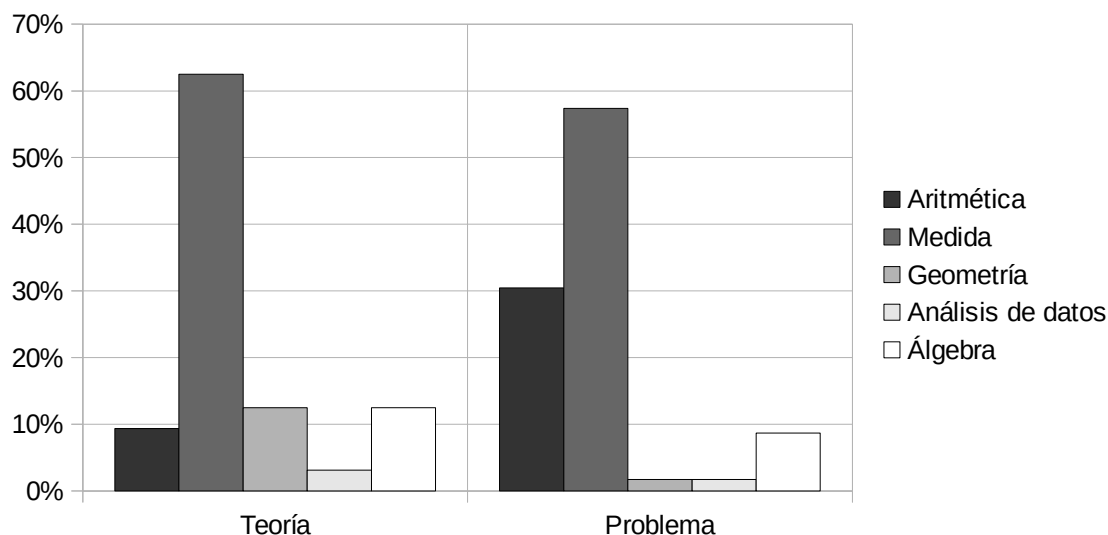


Figura 50: Frecuencias de Bloque por valores de Contexto en el Libro 3.

El Libro 4 tiene como peculiaridad la ausencia de errores de Teoría en Aritmética. Aparte, posee elevados porcentajes de errores de Teoría en Geometría (40,0%) y Álgebra (33,3%). En Medida la frecuencia es muy similar a la frecuencia en la muestra completa, con un 9,5% (ver Tabla 44 y Figuras 51 y 52).

Por último, como en la muestra completa, la mayor parte de los errores, tanto en Teoría como en Problemas, son de Medida. En el caso de Teoría conforman el 70,0% de los errores, seguidos por Geometría (20,0%) y por último Álgebra (10,0%). En el caso de Problema, Medida supone el 77,0%, Aritmética el 14,9%, Geometría el 3,4% y por último tenemos Análisis de datos y Álgebra, con un 2,3% cada uno.

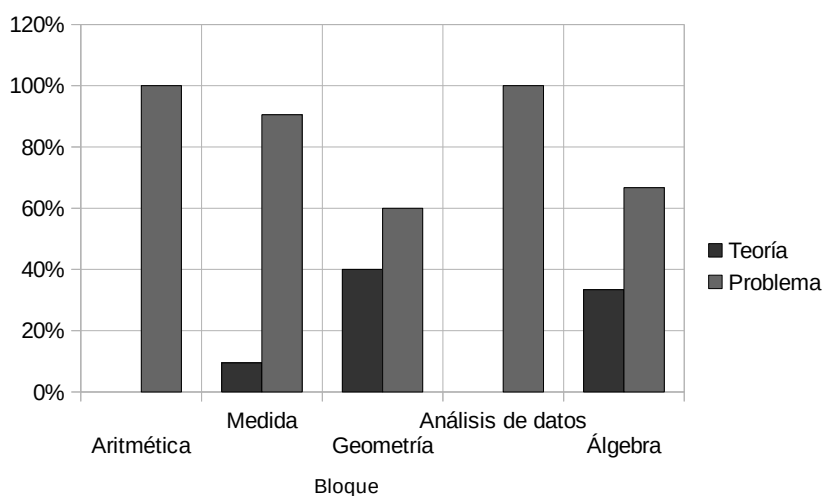


Figura 51: Frecuencias de Contexto por valores de Bloque en el Libro 4.

Tabla 44
Cruce de las variables Bloque y Contexto en el Libro 4.

Bloque		Contexto		
		Teoría	Problema	Total
Aritmética	Recuento	0	13	13
	% de Bloque	0,0%	100,0%	100,0%
	% de Contexto	0,0%	14,9%	13,4%
	% del total	0,0%	13,4%	13,4%
Medida	Recuento	7	67	74
	% de Bloque	9,5%	90,5%	100,0%
	% de Contexto	70,0%	77,0%	76,3%
	% del total	7,2%	69,1%	76,3%
Geometría	Recuento	2	3	5
	% de Bloque	40,0%	60,0%	100,0%
	% de Contexto	20,0%	3,4%	5,2%
	% del total	2,1%	3,1%	5,2%
Análisis de datos	Recuento	0	2	2
	% de Bloque	0,0%	100,0%	100,0%
	% de Contexto	0,0%	2,3%	2,1%
	% del total	0,0%	2,1%	2,1%
Álgebra	Recuento	1	2	3
	% de Bloque	33,3%	66,7%	100,0%
	% de Contexto	10,0%	2,3%	3,1%
	% del total	1,0%	2,1%	3,1%
Total	Recuento	10	87	97
	% de Bloque	10,3%	89,7%	100,0%
	% de Contexto	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	10,3%	89,7%	100,0%

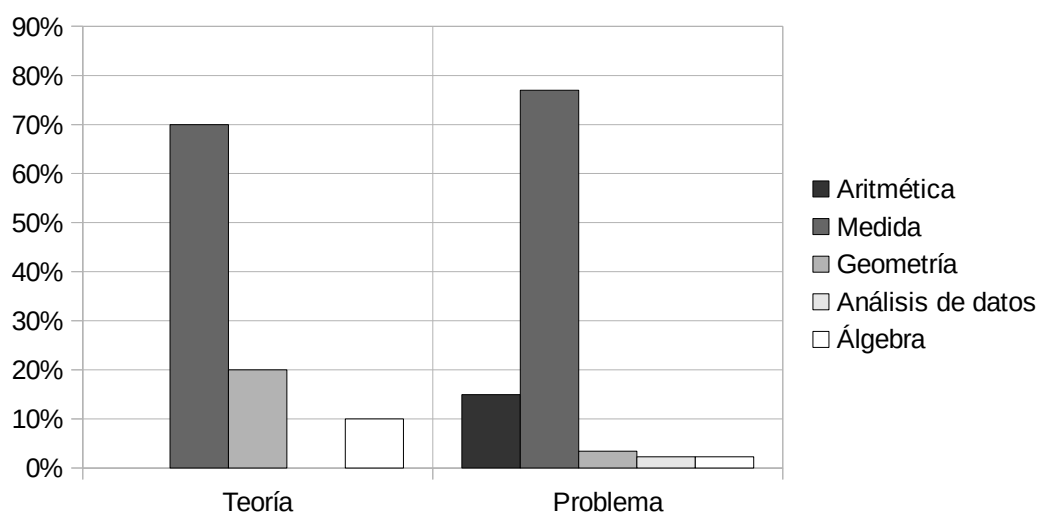


Figura 52: Frecuencias de Bloque por valores de Contexto en el Libro 4.

8.2.7. Clasificación por Bloque-Capítulo y Contexto

En este apartado mostramos gráficamente la relación entre el propósito de un problema y el bloque al que está dedicado el capítulo en el que el error se encuentra.

Para el análisis en toda la muestra, que podemos ver en la Tabla 45 y las Figuras 53 y 54, se advierte un fuerte parecido entre las barras de Teoría y Problema en cada valor de Bloque-Capítulo y la distribución general de Contexto, que recordemos estaba muy cercana a 10% para Teoría y 90% para Problema. En este caso, las proporciones varían relativamente poco: 3,1%-96,9% en Aritmética, 10,1%-89,9% en Medida, 12,2%-87,8% en Geometría, 5,0%-95,0% en Álgebra y finalmente el bloque más diferente, Análisis de datos, con 13,6%-86,4%.

En cuanto a las frecuencias de cada bloque por valor de Contexto, éstas también guardan un fuerte parecido con la tabla de frecuencias de Bloque-Capítulo, especialmente la de Problema. En Teoría, el bloque predominante es Medida, con un 68,9% de los errores. A continuación Geometría (14,8%), Álgebra (9,8%) y Aritmética (4,9%). Análisis de datos es la menos representada, con un 1,1% de la muestra.

En Problema, también los extremos son Medida (63,4%) y Análisis de datos (3,4%). En medio se encuentran Aritmética (15,9%), Geometría (11,0%) y Álgebra (6,4%).

En cambio, al ponderar por el número de errores de cada Bloque-Capítulo los resultados son diferentes. Al igual que hicimos para el cruce Bloque x Contexto, de esta forma obtenemos la propensión a encontrar un error de Teoría o de Problema en cada uno de los Bloques de contenido a que se dedica el capítulo.

En el caso de la Teoría, la ponderación nos muestra que los capítulos dedicados al Álgebra son más proclives a tener un error, con una frecuencia del 31%. A continuación nos encontramos con Geometría (27,6%) y Medida (23,0%). Por último se sitúan Análisis de datos (11,4%) y Aritmética (7,0%) como los bloques más fiables.

En cambio, los Problemas muestran una extraordinaria regularidad. Esto significa que, dado un error en el Contexto Problema, si el número de capítulos dedicados a cada Bloque de contenidos fuese idéntico, el Bloque a que se dedicase el

capítulo que contiene el error sería igualmente equiprobable. De hecho, las frecuencias ponderadas son 21,3% para Aritmética, 20,8% para Análisis de datos, 19,7% para Medida, 19,2% para Geometría y 18,9% para Álgebra.

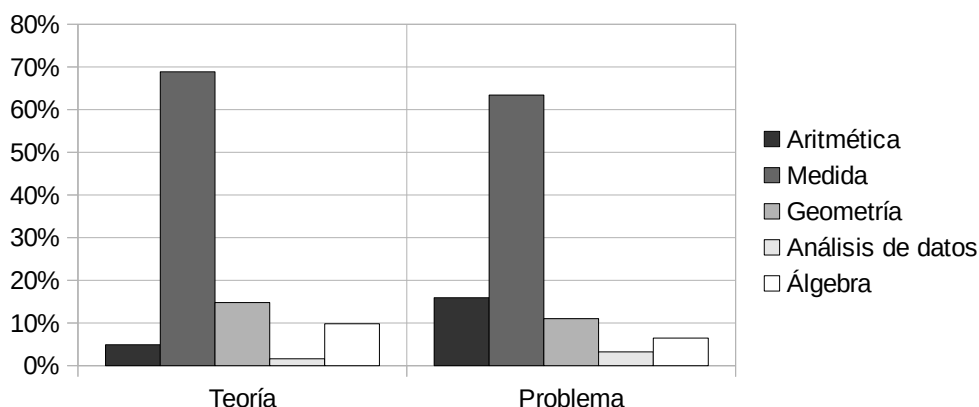


Figura 53: Frecuencias de Bloque-Capítulo en cada valor de Contexto.

Tabla 45
Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Contexto.

Bloque		Contexto		
		Teoría	Problema	Total
Aritmética	Recuento	3	94	97
	% de Bloque-Capítulo	3,1%	96,9%	100,0%
	% de Contexto	4,9%	15,9%	14,9%
	% del total	0,5%	14,4%	14,9%
Medida	Recuento	42	374	416
	% de Bloque-Capítulo	10,1%	89,9%	100,0%
	% de Contexto	68,9%	63,4%	63,9%
	% del total	6,5%	57,5%	63,9%
Geometría	Recuento	9	65	74
	% de Bloque-Capítulo	12,2%	87,8%	100,0%
	% de Contexto	14,8%	11,0%	11,4%
	% del total	1,4%	10,0%	11,4%
Análisis de datos	Recuento	1	19	20
	% de Bloque-Capítulo	5,0%	95,0%	100,0%
	% de Contexto	1,6%	3,2%	3,1%
	% del total	0,2%	2,9%	3,1%
Álgebra	Recuento	6	38	44
	% de Bloque-Capítulo	13,6%	86,4%	100,0%
	% de Contexto	9,8%	6,4%	6,8%
	% del total	0,9%	5,8%	6,8%
Total	Recuento	61	590	651
	% de Bloque-Capítulo	9,4%	90,6%	100,0%
	% de Contexto	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	9,4%	90,6%	100,0%

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

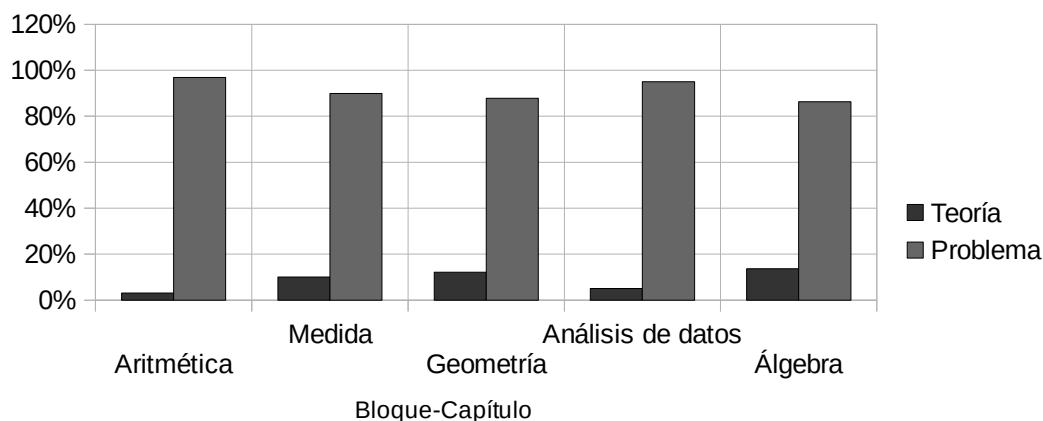


Figura 54: Frecuencias de Contexto en cada valor de Bloque-Capítulo.

En los libros encontramos ciertas particularidades. El Libro 1 carece de errores de Teoría en los capítulos dedicados a Análisis de datos o Álgebra. En los otros tres bloques de contenido, los errores de Teoría son más frecuentes en los capítulos dedicados a la Geometría (un 20%) mientras que en Aritmética y Medida son mucho más marginales (2,3% y 1,8% respectivamente).

En cuanto a la distribución de los errores por los capítulos dedicados a un área, los errores de Teoría tienen una mayor representación en los capítulos dedicados a la Geometría (50%), mientras que en los Problemas es la Medida la que aglutina la mayor parte de los errores (65,7%). Así, en la Teoría este libro se diferencia fuertemente del caso en que tomamos toda la muestra. Los datos se encuentran en la Tabla 46 y en las Figuras 55 y 56.

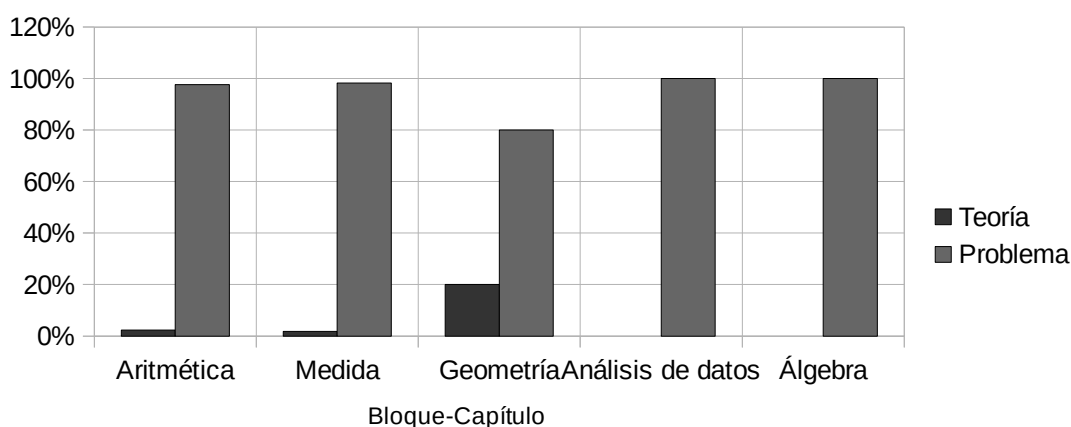


Figura 55: Porcentajes de Contexto en cada valor de Bloque-Capítulo en el Libro 1.

Tabla 46
Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Contexto en el Libro 1.

	Bloque	Contexto		
		Teoría	Problema	Total
Aritmética	Recuento	1	42	43
	% de Bloque-Capítulo	2,3%	97,7%	100,0%
	% de Contexto	12,5%	16,7%	16,6%
	% del total	0,4%	16,2%	16,6%
Medida	Recuento	3	165	168
	% de Bloque-Capítulo	1,8%	98,2%	100,0%
	% de Contexto	37,5%	65,7%	64,9%
	% del total	1,2%	63,7%	64,9%
Geometría	Recuento	4	16	20
	% de Bloque-Capítulo	20,0%	80,0%	100,0%
	% de Contexto	50,0%	6,4%	7,7%
	% del total	1,5%	6,2%	7,7%
Análisis de datos	Recuento	0	11	11
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	100,0%	100,0%
	% de Contexto	0,0%	4,4%	4,2%
	% del total	0,0%	4,2%	4,2%
Álgebra	Recuento	0	17	17
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	100,0%	100,0%
	% de Contexto	0,0%	6,8%	6,6%
	% del total	0,0%	6,6%	6,6%
Total	Recuento	8	251	259
	% de Bloque-Capítulo	3,1%	96,9%	100,0%
	% de Contexto	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	3,1%	96,9%	100,0%

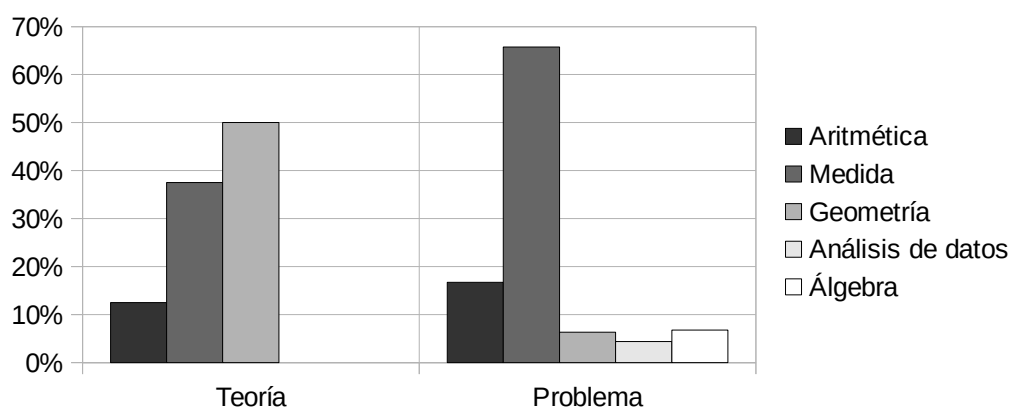


Figura 56: Frecuencia de los valores de Bloque-Capítulo en cada valor de Contexto en el Libro 1.

El Libro 2 se diferencia del libro 1 en varios factores: posee errores de teoría en capítulos de Álgebra (aunque no de Análisis de datos), los errores de Geometría tienen proporciones muy parecidas tanto en Teoría como en Problema y tanto en Teoría como en Problema es Medida el conjunto de errores más numeroso, como sucede al considerar toda la muestra.

Por lo demás, este libro presenta unos porcentajes relativamente altos de errores de Teoría en todas las áreas, siendo la mayor la de Álgebra, con un 14,3%. Le siguen Medida, con un 7,5%, Geometría, con un 6,7% y finalmente Aritmética, con un 4,8% (recordemos que no hay errores de Teoría en Análisis de Datos). Los datos se encuentran en la Tabla 47 y las Figuras 57 y 58.

Tabla 47
Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Contexto en el Libro 2.

Bloque		Contexto		
		Teoría	Problema	Total
Aritmética	Recuento	1	20	21
	% de Bloque-Capítulo	4,8%	95,2%	100,0%
	% de Contexto	9,1%	13,3%	13,0%
	% del total	0,6%	12,4%	13,0%
Medida	Recuento	6	74	80
	% de Bloque-Capítulo	7,5%	92,5%	100,0%
	% de Contexto	54,5%	49,3%	49,7%
	% del total	3,7%	46,0%	49,7%
Geometría	Recuento	3	42	45
	% de Bloque-Capítulo	6,7%	93,3%	100,0%
	% de Contexto	27,3%	28,0%	28,0%
	% del total	1,9%	26,1%	28,0%
Análisis de datos	Recuento	0	8	8
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	100,0%	100,0%
	% de Contexto	0,0%	5,3%	5,0%
	% del total	0,0%	5,0%	5,0%
Álgebra	Recuento	1	6	7
	% de Bloque-Capítulo	14,3%	85,7%	100,0%
	% de Contexto	9,1%	4,0%	4,3%
	% del total	0,6%	3,7%	4,3%
Total	Recuento	11	150	161
	% de Bloque-Capítulo	6,8%	93,2%	100,0%
	% de Contexto	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	6,8%	93,2%	100,0%

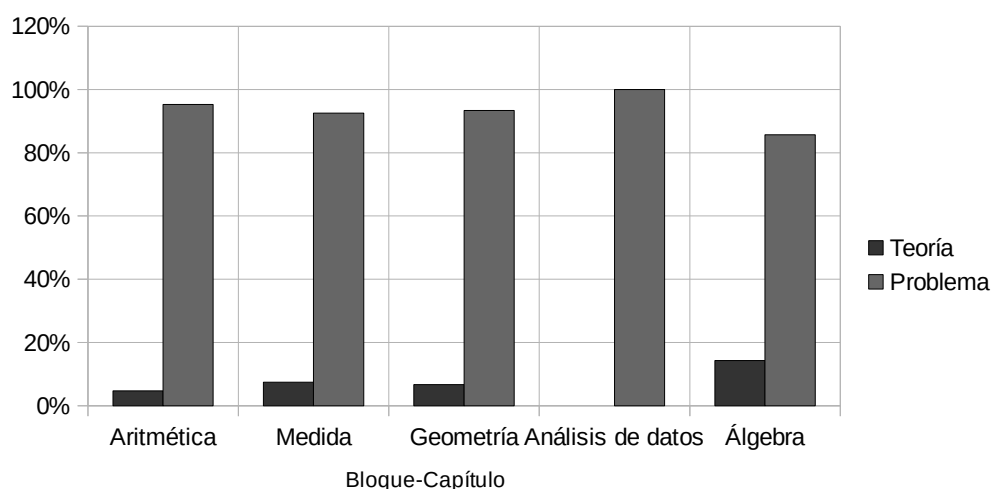


Figura 57: Porcentajes de Contexto en cada valor de Bloque-Capítulo en el Libro 2.

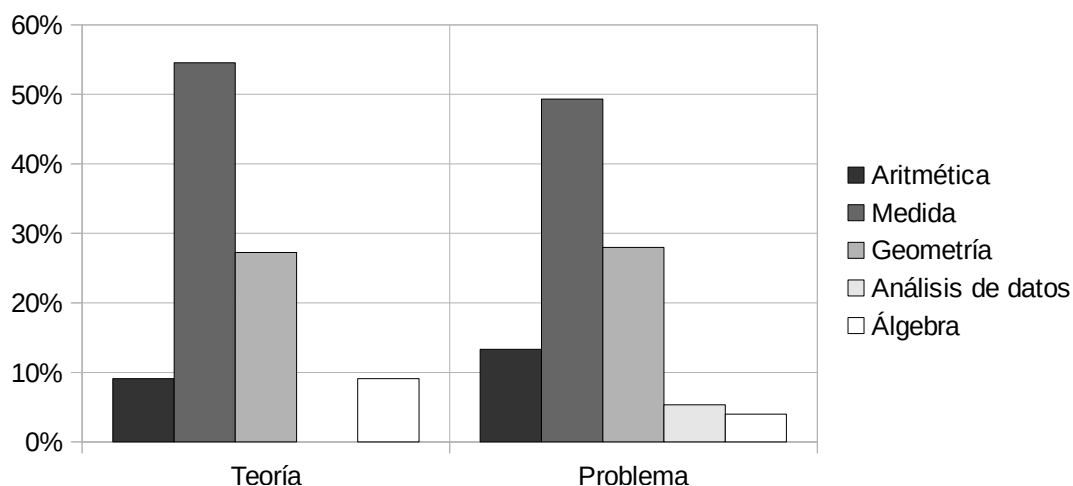


Figura 58: Frecuencia de los valores de Bloque-Capítulo en cada valor de Contexto en el Libro 2.

El Libro 3, recordemos, tiene aproximadamente dos tercios de errores de Medida. Eso afecta fuertemente a las proporciones de las demás, pues al existir muy pocos errores las frecuencias tienden a no ser significativas.

Por ejemplo, se da el caso de que en Análisis de datos hay un solo error y éste es de Teoría, por lo que es el primer caso (aunque en el Libro 4 veremos más) en el que el porcentaje de errores de tipo Problema se ve rebasado por los de Teoría. Por lo demás, los porcentajes de Teoría son, ordenados de menor a mayor, un 3,7% en Aritmética, un 23,5% en Álgebra, un 25,0% en Medida (este porcentaje, por tener un recuento numeroso, sí es significativo), un 33,3% en Geometría y un 100% en Análisis de datos (ver Tabla 48 y Figuras 59 y 60).

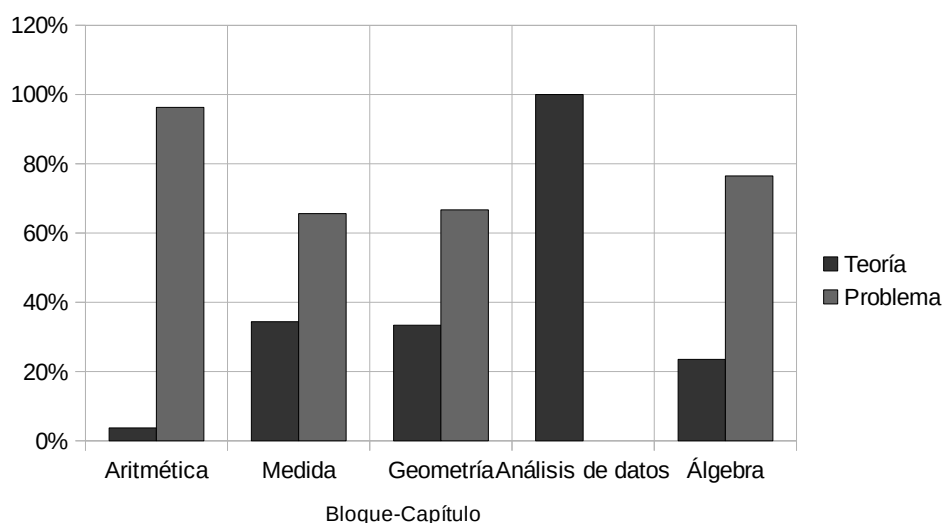


Figura 59: Porcentajes de Contexto en cada valor de Bloque-Capítulo en el Libro 3.

Errorres matemáticos en libros de texto de Singapur

Tabla 48

Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Contexto en el Libro 3.

	Bloque	Contexto		
		Teoría	Problema	Total
Aritmética	Recuento	1	26	27
	% de Bloque-Capítulo	3,7%	96,3%	100,0%
	% de Contexto	3,1%	22,6%	18,4%
	% del total	0,7%	17,7%	18,4%
Medida	Recuento	24	72	96
	% de Bloque-Capítulo	25,0%	75,0%	100,0%
	% de Contexto	75,0%	62,6%	65,3%
	% del total	16,3%	49,0%	65,3%
Geometría	Recuento	2	4	6
	% de Bloque-Capítulo	33,3%	66,7%	100,0%
	% de Contexto	6,2%	3,5%	4,1%
	% del total	1,4%	2,7%	4,1%
Análisis de datos	Recuento	1	0	1
	% de Bloque-Capítulo	100,0%	0,0%	100,0%
	% de Contexto	3,1%	0,0%	0,7%
	% del total	0,7%	0,0%	0,7%
Álgebra	Recuento	4	13	17
	% de Bloque-Capítulo	23,5%	76,5%	100,0%
	% de Contexto	12,5%	11,3%	11,6%
	% del total	2,7%	8,8%	11,6%
Total	Recuento	32	115	147
	% de Bloque-Capítulo	21,8%	78,2%	100,0%
	% de Contexto	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	21,8%	78,2%	100,0%

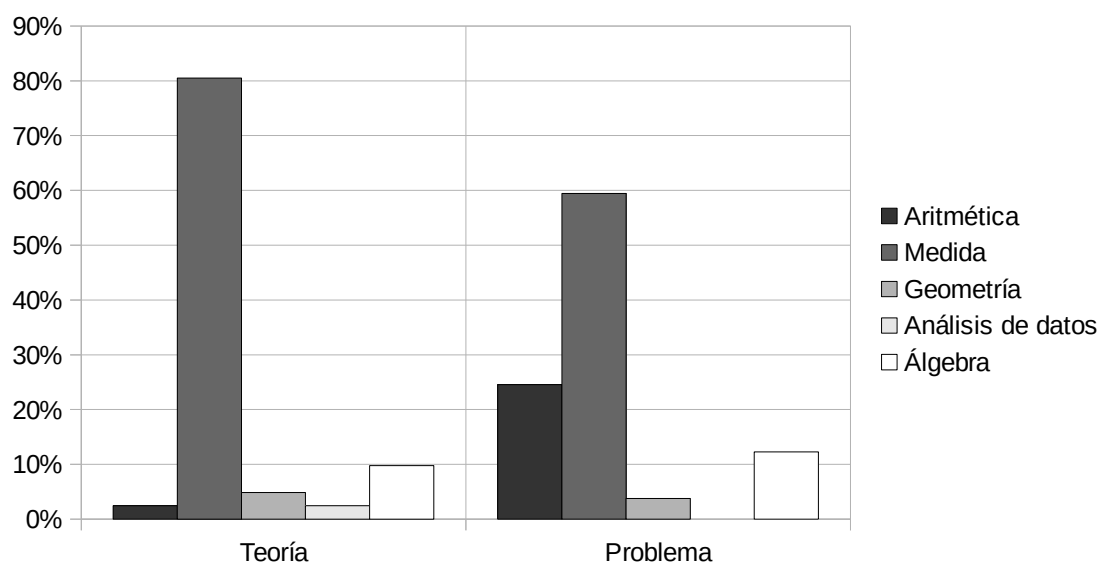


Figura 60: Frecuencia de los valores de Bloque-Capítulo en cada valor de Contexto en el Libro 3.

Por otra parte, los errores se distribuyen de forma distinta en los valores de Bloque-Capítulo según el Contexto. Así, los errores de Teoría están en capítulos de Medida en el 75,0% de los casos, en capítulos de Álgebra en el 12,5% de los casos y, marginalmente, en Geometría, Aritmética y Análisis de datos con un 6,3%, 3,1% y 3,1% respectivamente.

Sin embargo, los siempre más numerosos problemas, a pesar de estar mayoritariamente en capítulos de Medida, tienen una importante representación en Aritmética (24,5%) y, en menor medida, en Álgebra (12,3%) y Geometría (3,8%).

Por último, el Libro 4 es el más particular de todos, probablemente debido a que el número de errores válidos es el menor de todos (84 ocurrencias). Como otros libros carece de errores de Análisis de datos, pero aparte de eso posee tres bloques de contenido en los que hay más errores de Teoría que errores de Problema (ver Tabla 49 y Figuras 61 y 62).

Tabla 49
Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Contexto en el Libro 4.

Bloque		Contexto		
		Teoría	Problema	Total
Aritmética	Recuento	0	6	6
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	100,0%	100,0%
	% de Contexto	0,0%	8,1%	7,1%
	% del total	0,0%	7,1%	7,1%
Medida	Recuento	9	63	72
	% de Bloque-Capítulo	12,5%	87,5%	100,0%
	% de Contexto	90,0%	85,1%	85,7%
	% del total	10,7%	75,0%	85,7%
Geometría	Recuento	0	3	3
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	100,0%	100,0%
	% de Contexto	0,0%	4,1%	3,6%
	% del total	0,0%	3,6%	3,6%
Análisis de datos	Recuento	0	0	0
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	0,0%	0,0%
	% de Contexto	0,0%	0,0%	0,0%
	% del total	0,0%	0,0%	0,0%
Álgebra	Recuento	1	2	3
	% de Bloque-Capítulo	33,3%	66,7%	100,0%
	% de Contexto	10,0%	2,7%	3,6%
	% del total	1,2%	2,4%	3,6%
Total	Recuento	10	74	84
	% de Bloque-Capítulo	11,9%	88,1%	100,0%
	% de Contexto	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	11,9%	88,1%	100,0%

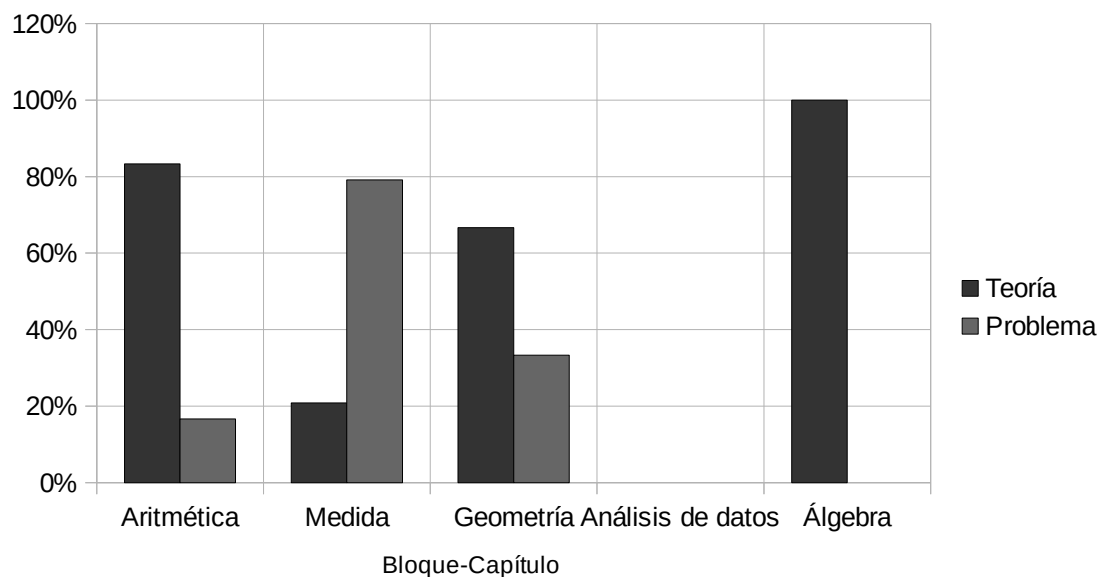


Figura 61: Porcentajes de Contexto en cada valor de Bloque-Capítulo en el Libro 4.

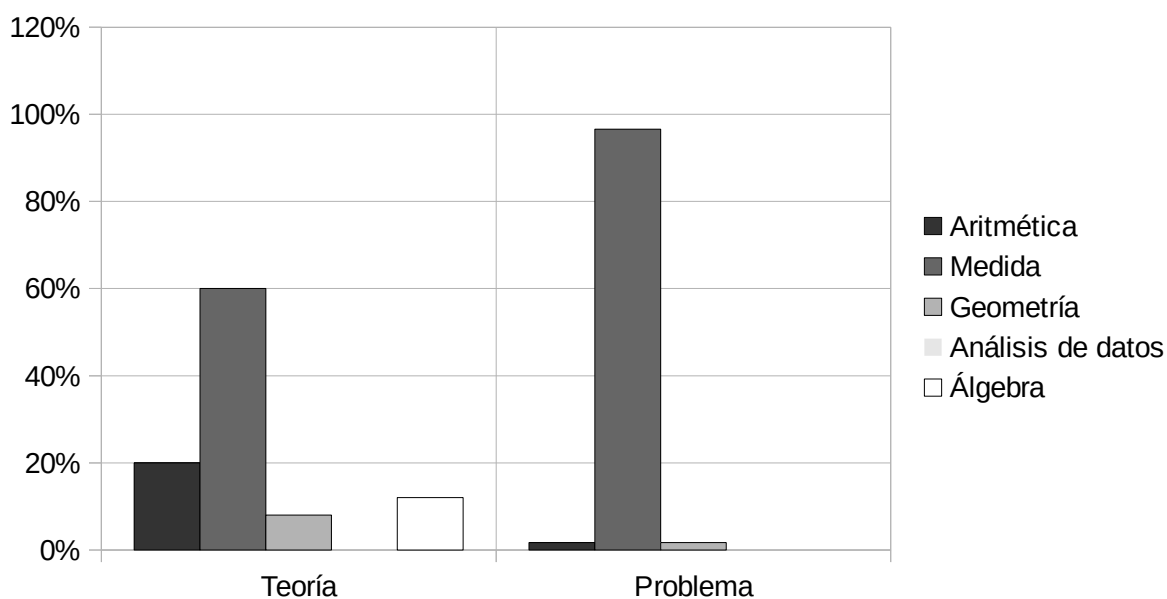


Figura 62: Frecuencia de los valores de Bloque-Capítulo en cada valor de Contexto en el Libro 4.

Los errores de Problema, a pesar de ser mucho más numerosos, no tienen representantes ni en los capítulos dedicados al Álgebra ni en los dedicados al Análisis de datos.

8.2.8. Clasificación por Bloque-Capítulo y Tipo de error

Tomando toda la muestra de valores válidos (recordemos que tomando Bloque-Capítulo hay un 5% de datos no válidos), podemos ver que cada bloque al que se dedica el capítulo en el que está contenido el error posee tipos de error distribuidos con frecuencias muy dispares. Indefinición es el Tipo mayoritario en tres de los bloques (Aritmética, un 41,2%; Análisis de datos, 70%; Álgebra, 40,9%), mientras que en Geometría es Omisión el mayoritario, con un 48,6%. Por último, en los capítulos de Medida es Símbolo el Tipo más numeroso, con un 49,0% de los casos. Los datos se encuentran en la Tabla 50 y las Figuras 63 y 64.

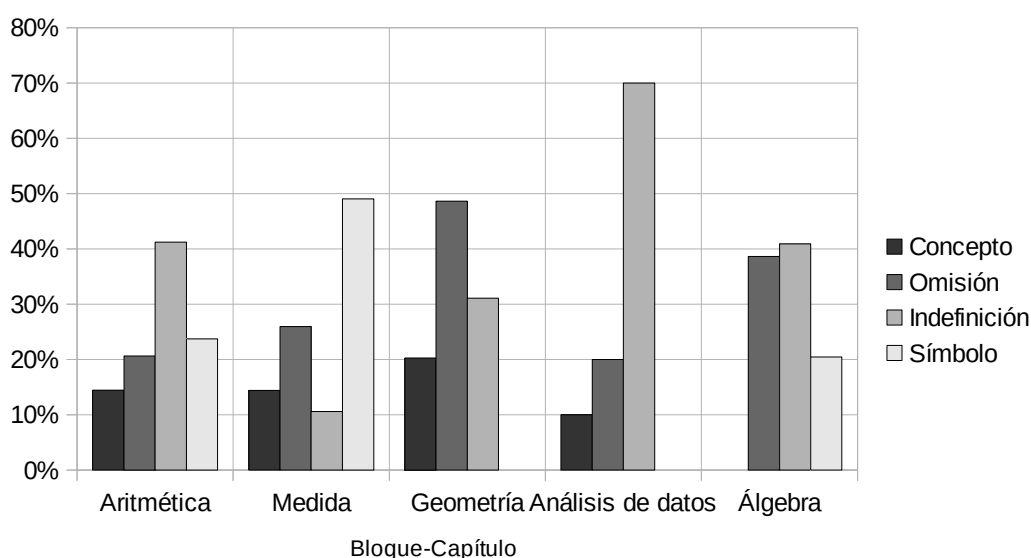


Figura 63: Distribución de Tipos de error por valores de Bloque-Capítulo.

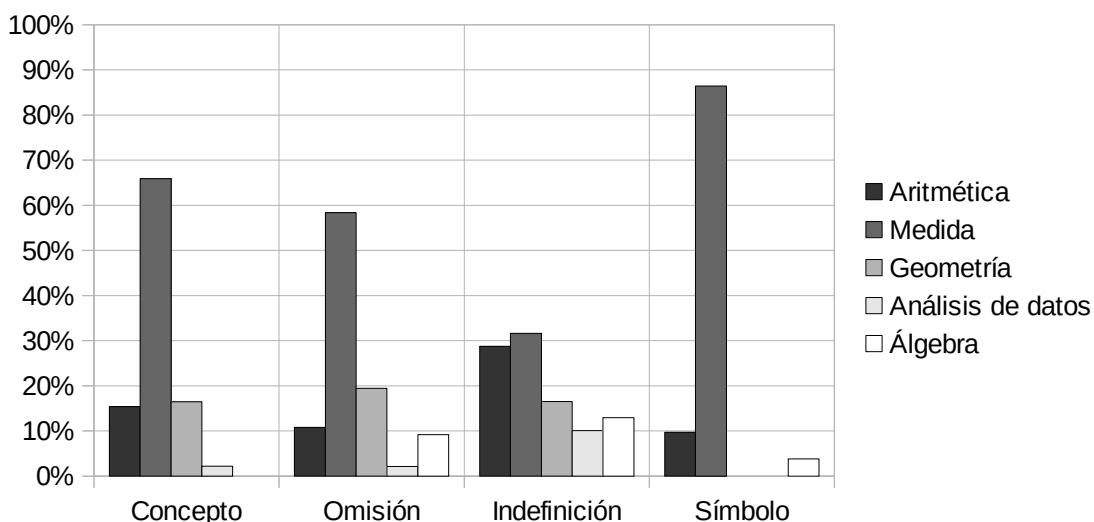


Figura 64: Distribución de valores de Bloque-Capítulo por Tipos de error.

Tabla 50

Cruce de las variables *Bloque-Capítulo* y *Tipo*.

Bloque-Capítulo		Tipo				
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	Total
Aritmética	Recuento	14	20	40	23	97
	% de Bloque-Capítulo	14,4%	20,6%	41,2%	23,7%	100,0%
	% de Tipo	15,4%	10,8%	28,8%	9,7%	14,9%
	% del total	2,2%	3,1%	6,1%	3,5%	14,9%
Medida	Recuento	60	108	44	204	416
	% de Bloque-Capítulo	14,4%	26,0%	10,6%	49,0%	100,0%
	% de Tipo	65,9%	58,4%	31,7%	86,4%	63,9%
	% del total	9,2%	16,6%	6,8%	31,3%	63,9%
Geometría	Recuento	15	36	23	0	74
	% de Bloque-Capítulo	20,3%	48,6%	31,1%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	16,5%	19,5%	16,5%	0,0%	11,4%
	% del total	2,3%	5,5%	3,5%	0,0%	11,4%
Análisis de datos	Recuento	2	4	14	0	20
	% de Bloque-Capítulo	10,0%	20,0%	70,0%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	2,2%	2,2%	10,1%	0,0%	3,1%
	% del total	0,3%	0,6%	2,2%	0,0%	3,1%
Álgebra	Recuento	0	17	18	9	44
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	38,6%	40,9%	20,5%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	9,2%	12,9%	3,8%	6,8%
	% del total	0,0%	2,6%	2,8%	1,4%	6,8%
Total	Recuento	91	185	139	236	651
	% de Bloque-Capítulo	14,0%	28,4%	21,4%	36,3%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	14,0%	28,4%	21,4%	36,3%	100,0%

La distribución de los distintos Tipos de error por los bloques de contenido a que se dedica el capítulo muestran que en todos los casos la mayor parte de los errores están en capítulos dedicados a la Medida. En efecto, así ocurre en el 90% de los errores de Símbolo, el 65,9% de los de Concepto, el 58,4% de los de Omisión y el 31,7% de los de Indefinición. Este último caso es el más uniformemente repartido.

Aunque la Figura anterior está fuertemente influenciada por la gran cantidad de errores de Medida, podemos extraer de la última tabla la tendencia de cada Bloque-Capítulo a generar errores de cada Tipo, leyendo por columnas las casillas “% de Bloque-Capítulo” y comparando entre diferentes Bloques-Capítulo. Así, en Concepto podemos ver que el peso de Aritmética es en realidad el mismo que el de Medida (14,4%), y que es Geometría el bloque más propenso a tener errores de Concepto (20,3%).

Para mostrar este resultado con más claridad, se ha realizado una ponderación de estos porcentajes tomando como base de comparación el menor de ellos distinto

de cero y dividiendo todos los demás por él. Los números resultantes reflejan las diferentes tendencias de cada valor de Bloque-Capítulo a ser un error de cada Tipo. En otras palabras, si la menor frecuencia de un Concepto fijo se encuentra en el Bloque-Capítulo “A” (al que se asigna 1) y el Bloque-Capítulo “B” tiene proporcionalmente el valor 2, significa que se ha detectado una tendencia a la aparición de errores del Concepto dado que es el doble de fuerte en los capítulos dedicados al bloque de contenidos “B” que en los dedicados al bloque de contenidos “A”. Este cálculo de la ponderación se ha llevado a cabo en otros casos aparte del descrito, como más adelante veremos. Podemos ver los resultados en la Tabla 51.

Tabla 51

Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque-Capítulo.

Bloque-Capítulo	Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo
Aritmética	1,44	1,03	3,90	1,16
Medida	1,44	1,30	1,00	2,40
Geometría	2,03	2,43	2,94	0,00
Análisis de datos	1,00	1,00	6,62	0,00
Álgebra	0,00	1,93	3,87	1,00

Con estos valores podemos ver cuáles son los Bloques-Capítulo que tienen mayor inclinación a generar errores de cada Tipo. En el caso de Concepto y Omisión, su Bloque-Capítulo característico es Geometría, mientras que el de Indefinición es Análisis de datos, y por último solamente Símbolo tiene por Bloque-Capítulo característico a Medida.

Es importante destacar que no existen errores de Concepto en capítulos dedicados al Álgebra, ni de Símbolo en capítulos dedicados a Geometría ni a Análisis de datos.

Pasemos a describir el comportamiento de estas variables en cada uno de los Libros.

El Libro 1 tiene un comportamiento muy similar a la muestra completa, pues existen muy pocas diferencias significativas. El Tipo de error más común es Indefinición tanto en Análisis de datos (81,8%) como en Aritmética (37,2%). En Geometría empata con Omisión (un 45% cada Tipo), el cual es el Tipo mayoritario en los capítulos de Álgebra (41,2%). Los datos se encuentran en la Tabla 52 y en las Figuras 65 y 66.

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

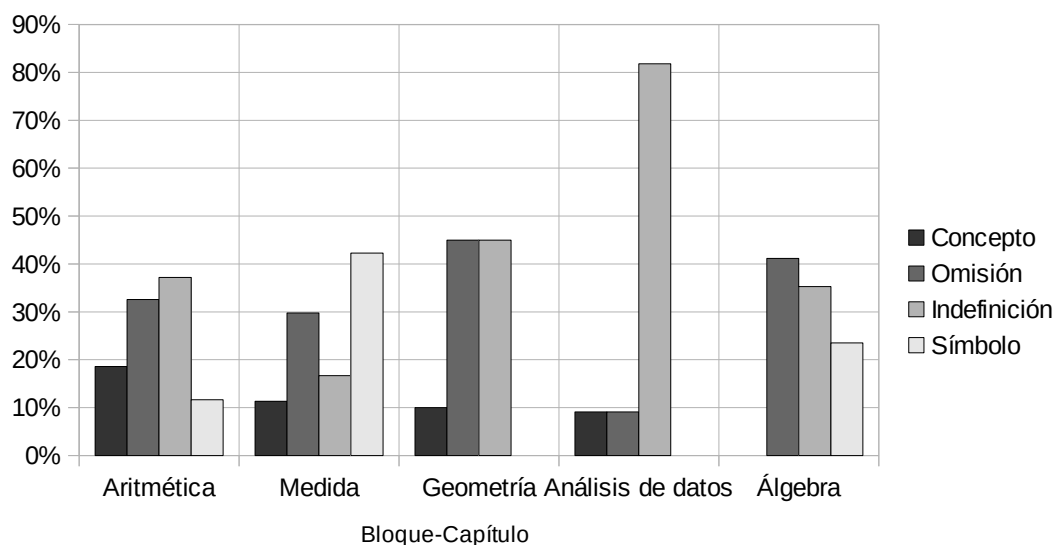


Figura 65: Distribución de Tipos de error por valores de Bloque-Capítulo en el Libro 1.

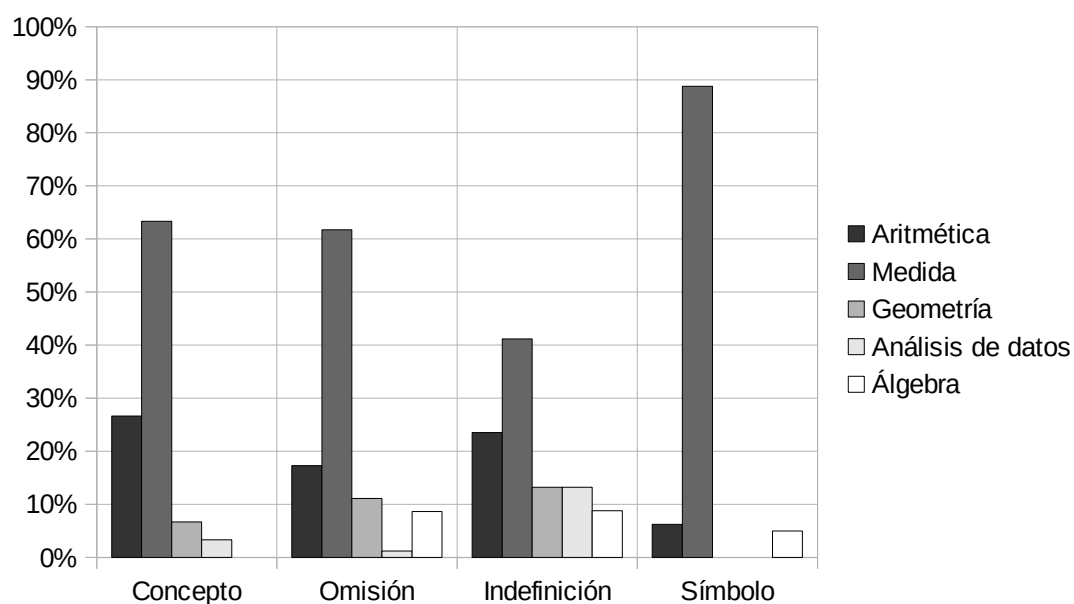


Figura 66: Distribución de valores de Bloque-Capítulo por Tipos de error en el Libro 1.

Dentro de cada uno de los Tipos de error se muestran prevalentes los que se encuentran en capítulos dedicados a la Medida: 88,8% en Símbolo, 63,3% en Concepto, 61,7% en Omisión y 41,2% en Indefinición, el más repartido de todos.

Tabla 52
Cruce de las variables *Bloque-Capítulo* y *Tipo* en el Libro 1.

Bloque-Capítulo		Tipo				
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	Total
Aritmética	Recuento	8	14	16	5	43
	% de Bloque-Capítulo	18,6%	32,6%	37,2%	11,6%	100,0%
	% de Tipo	26,7%	17,3%	23,5%	6,3%	16,6%
	% del total	3,1%	5,4%	6,2%	1,9%	16,6%
Medida	Recuento	19	50	28	71	168
	% de Bloque-Capítulo	11,3%	29,8%	16,7%	42,3%	100,0%
	% de Tipo	63,3%	61,7%	41,2%	88,8%	64,9%
	% del total	7,3%	19,3%	10,8%	27,4%	64,9%
Geometría	Recuento	2	9	9	0	20
	% de Bloque-Capítulo	10,0%	45,0%	45,0%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	6,7%	11,1%	13,2%	0,0%	7,7%
	% del total	0,8%	3,5%	3,5%	0,0%	7,7%
Análisis de datos	Recuento	1	1	9	0	11
	% de Bloque-Capítulo	9,1%	9,1%	81,8%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	3,3%	1,2%	13,2%	0,0%	4,2%
	% del total	0,4%	0,4%	3,5%	0,0%	4,2%
Álgebra	Recuento	0	7	6	4	17
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	41,2%	35,3%	23,5%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	8,6%	8,8%	5,0%	6,6%
	% del total	0,0%	2,7%	2,3%	1,5%	6,6%
Total	Recuento	30	81	68	80	259
	% de Bloque-Capítulo	11,6%	31,3%	26,3%	30,9%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	11,6%	31,3%	26,3%	30,9%	100,0%

Realizando las convenientes ponderaciones, vemos que el Bloque-Capítulo con mayor tendencia a generar errores de Concepto es Aritmética. En el Tipo Omisión esta tendencia es comparativamente alta en todos los Bloques-Capítulo excepto Análisis de datos, que es el de referencia. Pero el que tiene la mayor cifra de afinidad, muy poco por encima de Álgebra, es Geometría (ver Tabla 53).

En Indefinición es Análisis de datos el Bloque-Capítulo con más tendencia a producir errores (al fin y al cabo, el 81,8% de los errores de Análisis de datos son de Indefinición). Solamente en el caso de Símbolo se demuestra que Medida tiene mayor afinidad que otros Bloques-Capítulo.

Tabla 53

Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque-Capítulo en el Libro 1.

Bloque-Capítulo	Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo
Aritmética	2,05	3,58	2,23	1
Medida	1,24	3,27	1	3,63
Geometría	1,10	4,95	2,70	0
Análisis de datos	1	1	4,91	0
Álgebra	0	4,53	2,12	2,02

El Libro 2 tiene la particularidad de que no tiene errores de símbolo en capítulos dedicados a Geometría, Análisis de datos ni Álgebra, y que los errores en capítulos de Medida no son tan ampliamente mayoritarios en casi todos los conceptos.

Por bloques de contenido a que se dedica el capítulo, Indefinición sigue siendo el grupo más numeroso en Álgebra (71,4%), Aritmética (61,9%) y Análisis de datos (50%). El Tipo prevalente es Símbolo en Medida (50%) y Omisión en Geometría (53,3%). Los datos se encuentran en la Tabla 54 y las Figuras 67 y 68.

Tabla 54

Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Tipo en el Libro 2.

Bloque-Capítulo		Tipo				Total
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	
Aritmética	Recuento	4	3	13	1	21
	% de Bloque-Capítulo	19,0%	14,3%	61,9%	4,8%	100,0%
	% de Tipo	14,3%	5,4%	36,1%	2,4%	13,0%
	% del total	2,5%	1,9%	8,1%	0,6%	13,0%
Medida	Recuento	13	24	3	40	80
	% de Bloque-Capítulo	16,3%	30,0%	3,8%	50,0%	100,0%
	% de Tipo	46,4%	42,9%	8,3%	97,6%	49,7%
	% del total	8,1%	14,9%	1,9%	24,8%	49,7%
Geometría	Recuento	10	24	11	0	45
	% de Bloque-Capítulo	22,2%	53,3%	24,4%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	35,7%	42,9%	30,6%	0,0%	28,0%
	% del total	6,2%	14,9%	6,8%	0,0%	28,0%
Análisis de datos	Recuento	1	3	4	0	8
	% de Bloque-Capítulo	12,5%	37,5%	50,0%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	3,6%	5,4%	11,1%	0,0%	5,0%
	% del total	0,6%	1,9%	2,5%	0,0%	5,0%
Álgebra	Recuento	0	2	5	0	7
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	28,6%	71,4%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	3,6%	13,9%	0,0%	4,3%
	% del total	0,0%	1,2%	3,1%	0,0%	4,3%
Total	Recuento	28	56	36	41	161
	% de Bloque-Capítulo	17,4%	34,8%	22,4%	25,5%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	17,4%	34,8%	22,4%	25,5%	100,0%

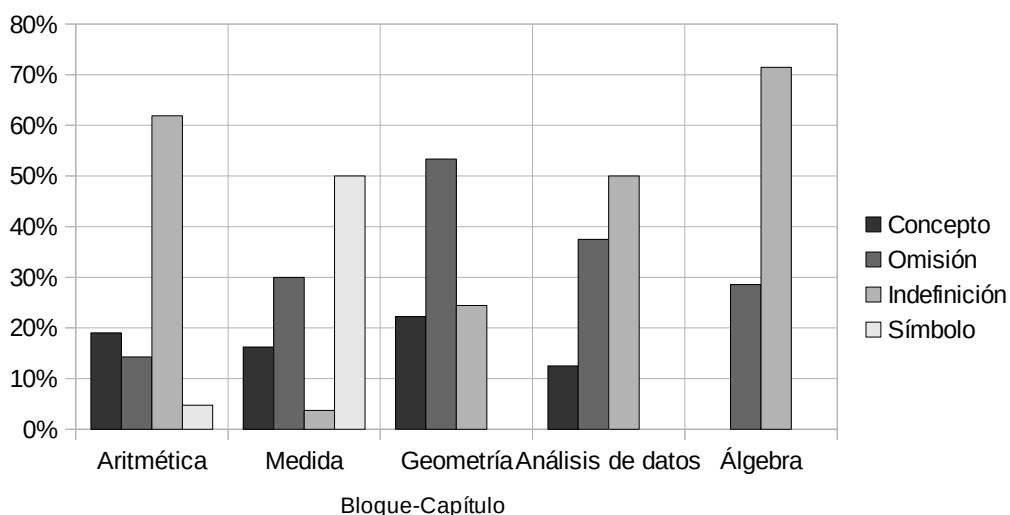


Figura 67: Distribución de Tipos de error por valores de Bloque-Capítulo en el Libro 2.

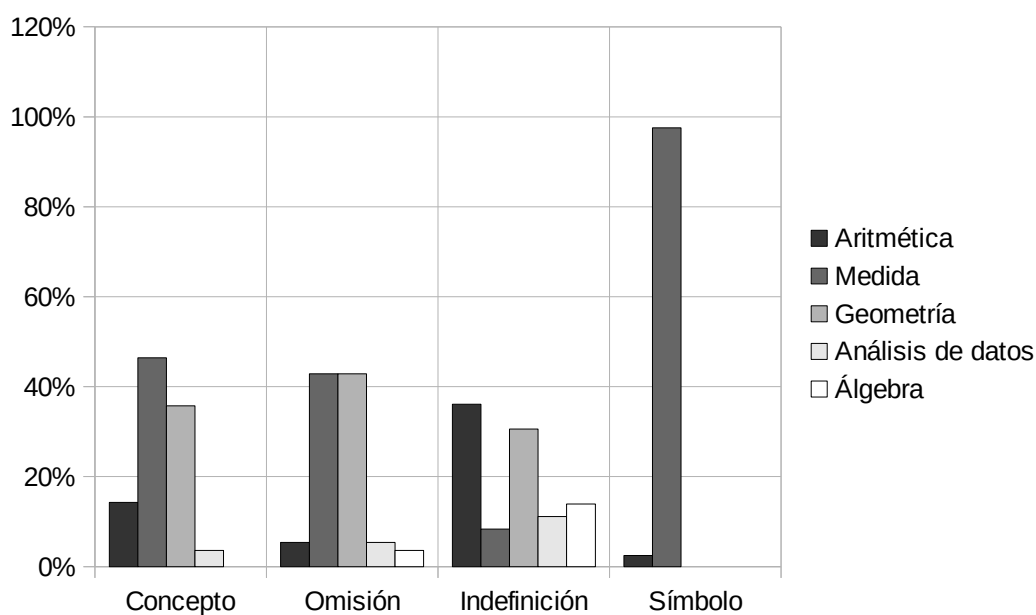


Figura 68: Distribución de valores de Bloque-Capítulo por Tipos de error en el Libro 2.

En cuanto a la distribución de cada Tipo por los bloques de contenidos de los capítulos, Medida es el más frecuente en los errores de Símbolo (97,6%) y, con mucha menos claridad, en Concepto (46,4%). Los errores de Omisión tienen la misma prevalencia tanto en errores de Medida como de Geometría (42,9%). Por último, los errores de Indefinición son mayoritarios en los capítulos dedicados a la Aritmética (36,1%).

Aunque este caso no se ve tan influido por la alta proporción de errores de Medida, conviene realizar igualmente el análisis de afinidades de cada Bloque-Capítulo por cada Tipo. En efecto, la Tabla 55 muestra cómo tanto en Concepto como en Omisión no hay afinidades relativamente altas respecto a todas las demás, siendo la mayor la de Geometría. En Indefinición hay varios valores altos respecto a la referencia (que, recordemos, es el menor de los porcentajes), pero con escasas diferencias entre sí. La mayor afinidad por Indefinición, no obstante, se encuentra en el Bloque-Capítulo Álgebra. Por último, en Símbolo sí destaca claramente (por ausencia de errores de Símbolo en los capítulos de Geometría, Análisis de datos y Álgebra) Medida como el Bloque-Capítulo con mayor tendencia a generar errores de Símbolo.

Tabla 55

Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque-Capítulo en el Libro 2.

Bloque-Capítulo	Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo
Aritmética	1,52	1	16,51	1
Medida	1,30	2,10	1	10,50
Geometría	1,78	3,73	6,52	0
Análisis de datos	1	2,63	13,33	0
Álgebra	0	2,00	19,05	0

El Libro 3 tiene como nota particular que solamente hay un error ubicado en capítulos de Análisis de datos, y éste es de Indefinición. En los demás bloques de contenidos los errores de Indefinición no representan la mayoría clara de los errores, al contrario que en la muestra completa.

Tanto en los bloques de Medida (con un 53,1%) como en los de Aritmética (con un 44,4%), los errores de Símbolo son los más numerosos. En Análisis de datos, como ya vimos, solamente hay un error que es de Indefinición. Esta categoría es mayoritaria junto con Omisión en el bloque Álgebra. Por último, en Geometría es Omisión el Tipo más frecuente, con un 50% (3 de los 6 errores existentes). Los datos se encuentran en la Tabla 56 y las Figuras 69 y 70.

Por otra parte, como es lo regular hasta ahora, los errores de Medida son los más habituales en todos los Tipos de error: prevalecen con un 80% en el Tipo Concepto, con un 77,3% en el Tipo Símbolo, con un 61,8% en el Tipo Omisión y, mucho menos prominentemente, en el Tipo Indefinición con un 37,5%.

Tabla 56
Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Tipo en el Libro 3.

Bloque-Capítulo		Tipo				
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	Total
Aritmética	Recuento	2	3	10	12	27
	% de Bloque-Capítulo	7,4%	11,1%	37,0%	44,4%	100,0%
	% de Tipo	13,3%	8,8%	31,3%	18,2%	18,4%
	% del total	1,4%	2,0%	6,8%	8,2%	18,4%
Medida	Recuento	12	21	12	51	96
	% de Bloque-Capítulo	12,5%	21,9%	12,5%	53,1%	100,0%
	% de Tipo	80,0%	61,8%	37,5%	77,3%	65,3%
	% del total	8,2%	14,3%	8,2%	34,7%	65,3%
Geometría	Recuento	1	3	2	0	6
	% de Bloque-Capítulo	16,7%	50,0%	33,3%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	6,7%	8,8%	6,3%	0,0%	4,1%
	% del total	0,7%	2,0%	1,4%	0,0%	4,1%
Análisis de datos	Recuento	0	0	1	0	1
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	0,0%	3,1%	0,0%	0,7%
	% del total	0,0%	0,0%	0,7%	0,0%	0,7%
Álgebra	Recuento	0	7	7	3	17
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	41,2%	41,2%	17,6%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	20,6%	21,9%	4,5%	11,6%
	% del total	0,0%	4,8%	4,8%	2,0%	11,6%
Total	Recuento	15	34	32	66	147
	% de Bloque-Capítulo	10,2%	23,1%	21,8%	44,9%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	10,2%	23,1%	21,8%	44,9%	100,0%

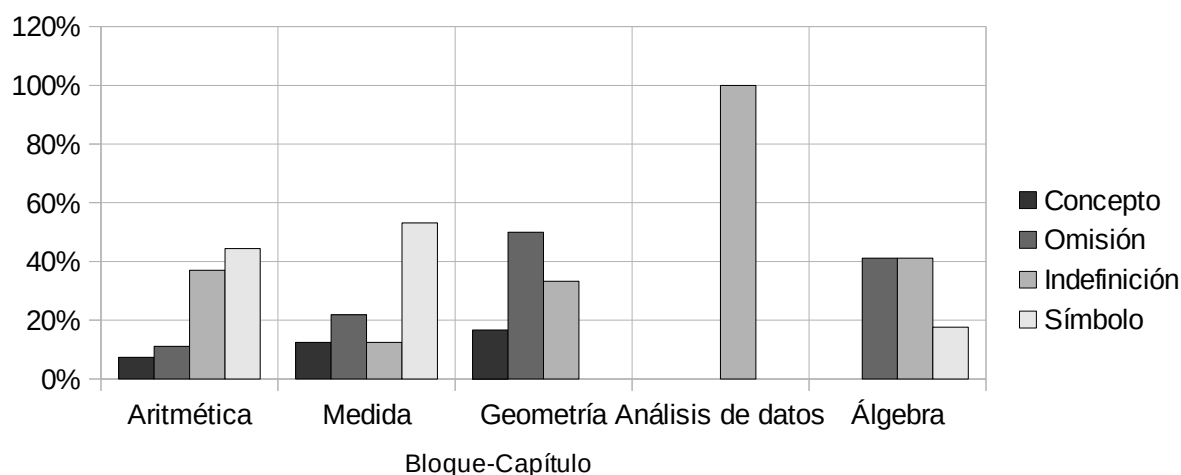


Figura 69: Distribución de Tipos de error por valores de Bloque-Capítulo en el Libro 3.

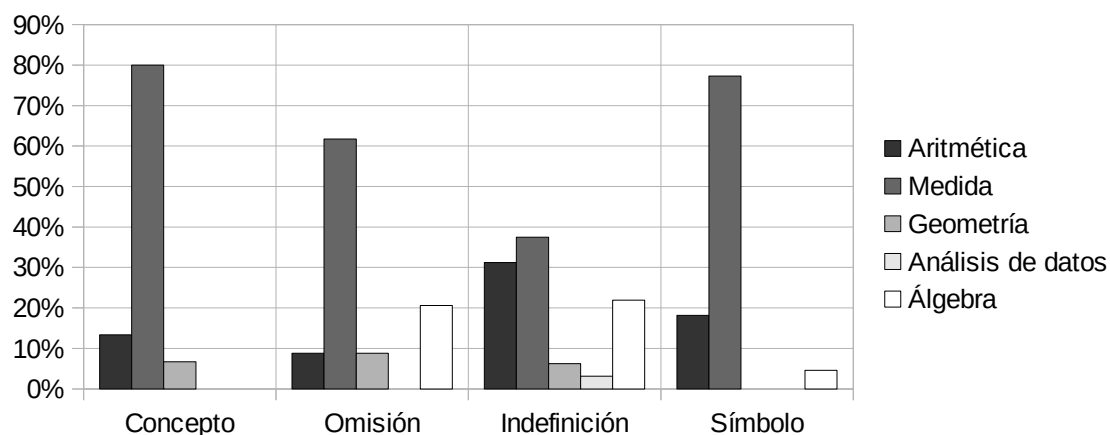


Figura 70: Distribución de valores de Bloque-Capítulo por Tipos de error en el Libro 3.

En el Libro 3 todos los Tipos se ven dominados por Medida, por lo que es especialmente conveniente mostrar la afinidad real de cada Bloque-Capítulo por los distintos Tipos.

En efecto, en la Tabla 57 vemos como, al igual que en otros libros, la afinidad de Geometría es máxima tanto en Concepto como en Omisión. La ausencia de errores de otros Tipos al margen de Indefinición en los capítulos dedicados a Análisis de datos también hacen que sea Análisis de datos el Bloque-Capítulo más afín a Indefinición. Por último, Símbolo muestra ser el único Tipo en el que Medida es más proclive que los demás para generar errores, aunque Aritmética muestra una tendencia solo ligeramente menor.

Tabla 57
Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque-Capítulo en el Libro 3.

Bloque-Capítulo	Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo
Aritmética	1,52	1	16,51	1
Medida	1,30	2,10	1	10,50
Geometría	1,78	3,73	6,52	0
Análisis de datos	1	2,63	13,33	0
Álgebra	0	2,00	19,05	0

El Libro 4, nuevamente debido al escaso número de errores que posee y a la concentración de los mismos en capítulos de Medida y pertenecientes al Tipo Símbolo, se comporta de una forma distinta al resto en cuanto a la composición de los errores de los capítulos dedicados a cada bloque de contenidos, aunque no tanto en lo que respecta a la prevalencia de esos mismos bloques para cada Tipo. Además,

hay muchísimas más combinaciones de Tipo y Bloque-Capítulo con frecuencias nulas que en el resto de Libros.

El Tipo Símbolo es mayoritario en Aritmética (83,3%), Álgebra (66,7%) y Medida (58,3%). En Geometría, a diferencia del resto de Libros, es Concepto el bloque más representativo (66,7%). Los datos se pueden ver en la Tabla 58 y las Figuras 71 y 72.

Tabla 58
Cruce de las variables Bloque-Capítulo y Tipo en el Libro 4.

Bloque-Capítulo		Tipo				
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	Total
Aritmética	Recuento	0	0	1	5	6
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	0,0%	16,7%	83,3%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	0,0%	33,3%	10,2%	7,1%
	% del total	0,0%	0,0%	1,2%	6,0%	7,1%
Medida	Recuento	16	13	1	42	72
	% de Bloque-Capítulo	22,2%	18,1%	1,4%	58,3%	100,0%
	% de Tipo	88,9%	92,9%	33,3%	85,7%	85,7%
	% del total	19,0%	15,5%	1,2%	50,0%	85,7%
Geometría	Recuento	2	0	1	0	3
	% de Bloque-Capítulo	66,7%	0,0%	33,3%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	11,1%	0,0%	33,3%	0,0%	3,6%
	% del total	2,4%	0,0%	1,2%	0,0%	3,6%
Análisis de datos	Recuento	0	0	0	0	0
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	% de Tipo	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	% del total	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Álgebra	Recuento	0	1	0	2	3
	% de Bloque-Capítulo	0,0%	33,3%	0,0%	66,7%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	7,1%	0,0%	4,1%	3,6%
	% del total	0,0%	1,2%	0,0%	2,4%	3,6%
Total	Recuento	18	14	3	49	84
	% de Bloque-Capítulo	21,4%	16,7%	3,6%	58,3%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	21,4%	16,7%	3,6%	58,3%	100,0%

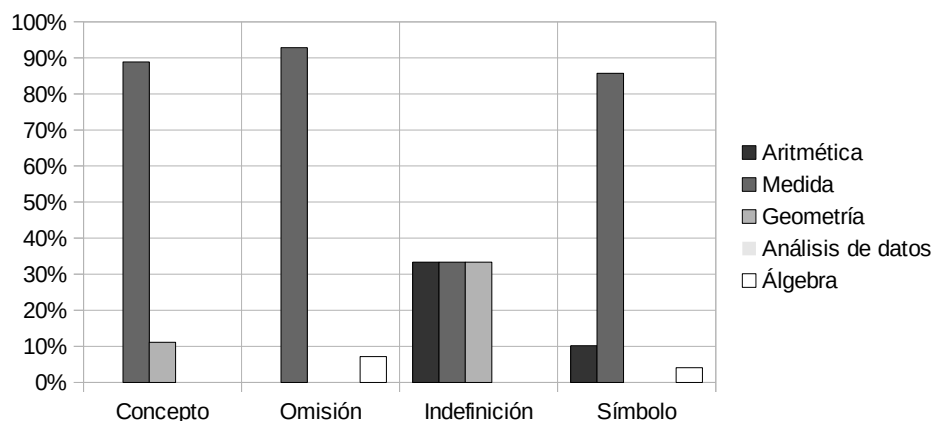


Figura 71: Distribución de valores de Bloque-Capítulo por Tipos de error en el Libro 4.

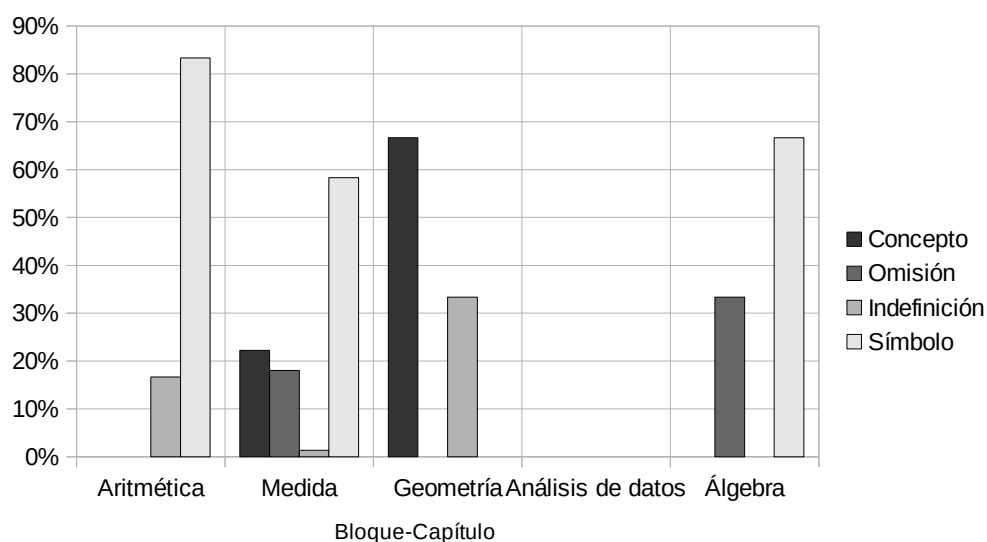


Figura 72: Distribución de Tipos de error por valores de Bloque-Capítulo en el Libro 4.

En cuanto a la distribución de cada Tipo, nuevamente Medida es el más numeroso en Omisión (92,9%), Concepto (88,9%) y Símbolo (85,7%). Los tres errores de Indefinición identificados se encuentran repartidos a partes iguales en Aritmética, Medida y Geometría.

La limitada variedad de Bloques-Capítulo en que se han identificado los errores de cada Tipo y la importante acumulación de errores de Medida pueden resultar engañosas. Al realizar la ponderación, vemos que en ningún caso Medida tiene la máxima afinidad por ninguno de los Tipos (ver Tabla 59). En Concepto e Indefinición es Geometría el Bloque-Capítulo más proclive. En Omisión la afinidad de Álgebra es un 85% mayor que la de Medida, y por último en Símbolo es Aritmética el Bloque-Capítulo con mayor tendencia (lo cual marca las diferencias con los demás Libros).

Tabla 59

Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque-Capítulo en el Libro 4.

Bloque-Capítulo	Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo
Aritmética	1,52	1	16,51	1
Medida	1,30	2,10	1	10,50
Geometría	1,78	3,73	6,52	0
Análisis de datos	1	2,63	13,33	0
Álgebra	0	2,00	19,05	0

8.2.9. Clasificación por Contexto y Tipo de error

Los errores de Teoría están compuestos fundamentalmente por errores de Omisión (41,5%), Símbolo (29,2%) y Concepto (23,1%). Solamente Indefinición queda con un 6,2%.

Por su parte, los Problemas están mucho más ecuánimemente repartidos. La mayor parte vuelve a ser Símbolo (35,5%), seguido de Omisión (27,7%), Indefinición (23,5%) y por último Concepto (13,2%).

En cuanto a la composición de cada Tipo, en todos los casos está relativamente cerca de la proporción general de Contexto (que recordemos es muy cercana a 90% de Problema y 10% de Teoría), aunque en el caso de Indefinición la diferencia es máxima (97,3% de Problema frente a 2,7% de Teoría) y en Concepto es mínima (84,5% de Problema frente a 15,5% de Teoría).

Observando en la Tabla 60 y las Figura 73 y 74, vemos que los porcentajes de Tipo en Teoría, que tiene en cuenta las frecuencias de cada tipo y por tanto nos informa de la predisposición que tienen los errores de Teoría a ser de un Tipo u otro, vemos que la mayor frecuencia es la de errores de Concepto, seguida muy de cerca de Omisión. Símbolo, por su parte, es apenas la mitad de frecuente que Concepto. Por último, Indefinición es cinco veces menos frecuente que Concepto. Es decir, si ponderamos los porcentajes sobre 100% obtenemos que el 39,0% de los errores de Teoría son de Concepto, el 34,2% son de Omisión, el 20,0% son de Símbolo y tan solo el 6,7% restante es de Indefinición.

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

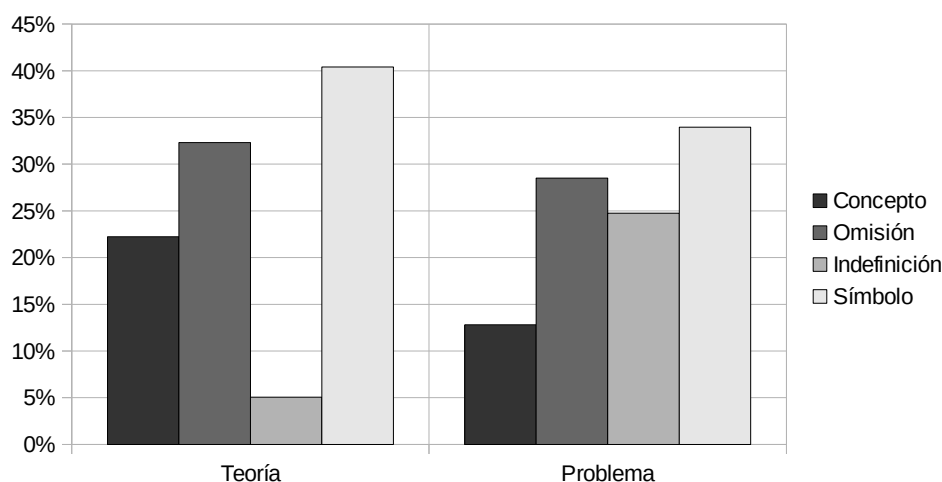


Figura 73: Valores de la variable Tipo por cada valor de Contexto.

Análogamente, la composición de Problema es muy similar para todos los Tipos. Tras la ponderación al 100%, encontramos un 27,0% de errores de Indefinición, un 25,5% de errores de Símbolo, un 24,0% de errores de Omisión y por último un 23,5% de errores de Concepto.

Tabla 60

Cruce de las variables Contexto y Tipo de error.

Contexto		Tipo				Total
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	
Teoría	Recuento	15	27	4	19	65
	% de Contexto	23,1%	41,5%	6,2%	29,2%	100,0%
	% de Tipo	15,5%	13,6%	2,7%	7,9%	9,5%
	% del total	2,2%	3,9%	0,6%	2,8%	9,5%
Problema	Recuento	82	172	146	220	620
	% de Contexto	13,2%	27,7%	23,5%	35,5%	100,0%
	% de Tipo	84,5%	86,4%	97,3%	92,1%	90,5%
	% del total	12,0%	25,1%	21,3%	32,1%	90,5%
Total	Recuento	97	199	150	239	685
	% de Contexto	14,2%	29,1%	21,9%	34,9%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	14,2%	29,1%	21,9%	34,9%	100,0%

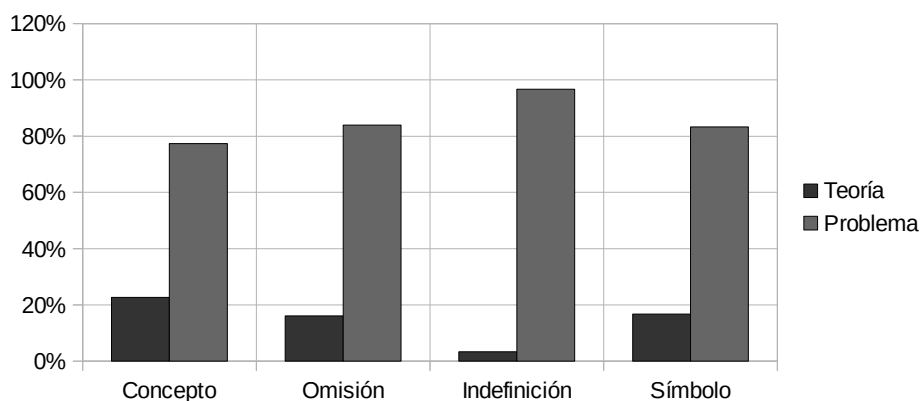


Figura 74: Valores de la variable Contexto por cada valor de Tipo.

Si hacemos la ponderación inversa, para conocer la proporción de errores de Teoría y Problema por cada Tipo pero atendiendo al número de errores de cada Contexto, los números son considerablemente diferentes, aunque no equilibrados. En Concepto, es más frecuente encontrar un error de Teoría por un 63,6% frente al 36,4% de Problema. En Omisión, las frecuencias son 60,0% para Teoría y 40,0% para Problema. Sin embargo, los otros dos Tipos son más proclives a exhibir errores de Problema. Indefinición tiene un 79,3% frente al 20,7% de Teoría y Símbolo, más equilibrado, tiene un 54,8% de Problemas y un 45,2% de Teoría.

Pasemos a describir cada Libro de forma individual. En el Libro 1 existe una apreciable subida de errores de Omisión en Teoría. De hecho, Omisión compone el 75,0% de los errores de Teoría, dejando un 12,5% de errores tanto a Indefinición como a Concepto. No existen errores de Símbolo en Teoría.

Aparte, en todos los Tipos el porcentaje de errores de Contexto Problema es mayor que en la muestra completa, pues los porcentajes van del 100% de Símbolo al 92,6% de Omisión, pasando por el 98,5% de Indefinición y el 96,7% de Concepto.

Entre los errores de Teoría, tras la ponderación de los porcentajes por Tipo, el Tipo Omisión es el mayor componente con un 60,7%. A continuación tenemos Concepto, con un 27,3% y por último Indefinición con un 12,0%. Recordemos que no hay errores de Símbolo en Teoría. En cambio, en Problema las frecuencias de Concepto, Omisión, Indefinición y Símbolo son muy parecidas (24,9%, 23,9%, 25,4% y 25,8% respectivamente). Los datos se encuentran en la Tabla 61 y en las Figuras 75 y 76.

Tabla 61
Cruce de las variables Contexto y Tipo de error en el Libro 1.

Contexto		Tipo				
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	Total
Teoría	Recuento	1	6	1	0	8
	% de Contexto	12,5%	75,0%	12,5%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	3,3%	7,4%	1,5%	0,0%	3,1%
	% del total	0,4%	2,3%	0,4%	0,0%	3,1%
Problema	Recuento	29	75	67	80	251
	% de Contexto	11,6%	29,9%	26,7%	31,9%	100,0%
	% de Tipo	96,7%	92,6%	98,5%	100,0%	96,9%
	% del total	11,2%	29,0%	25,9%	30,9%	96,9%
Total	Recuento	30	81	68	80	259
	% de Contexto	11,6%	31,3%	26,3%	30,9%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	11,6%	31,3%	26,3%	30,9%	100,0%

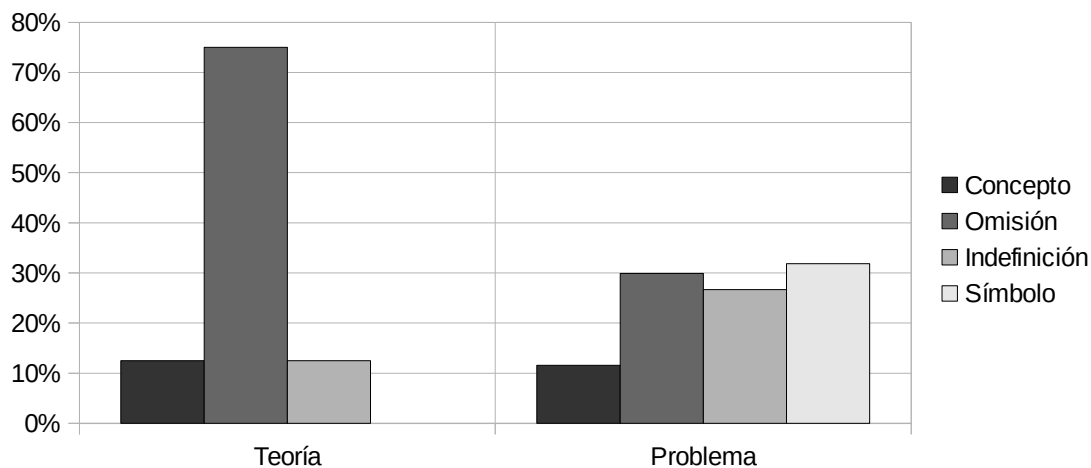


Figura 75: Valores de la variable Tipo por cada valor de Contexto en el Libro 1.

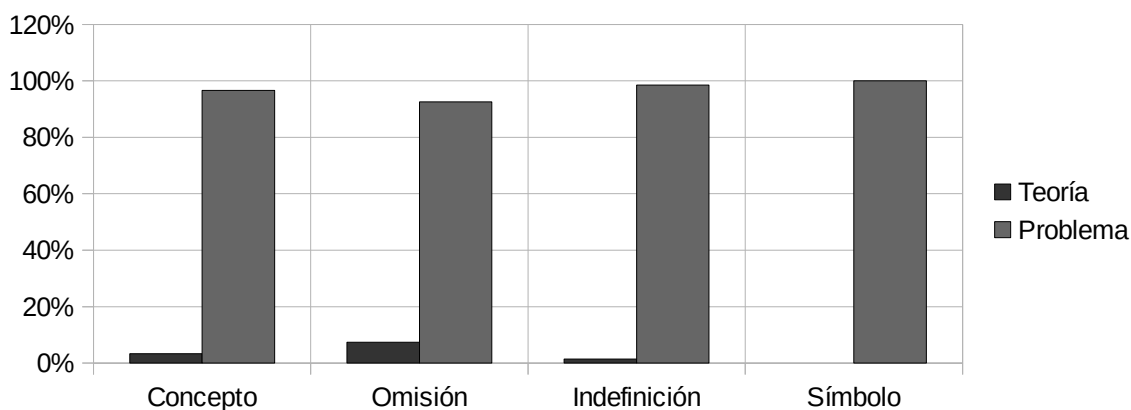


Figura 76: Valores de la variable Contexto por cada valor de Tipo en el Libro 1.

Vayamos ahora con el Libro 2. Éste tiene de particular la inexistencia de errores de Teoría en Indefinición y Símbolo. Además, tiene los porcentajes de Problema en cada Tipo más irregulares de toda la población.

En Teoría, el 53,3% de los errores son de Concepto, mientras que el 46,7% restante es de Omisión. Sin embargo, la cercanía es aparente. Ponderando por el número de errores de cada Tipo a partir del porcentaje de Tipo que figura en la Tabla 62 y las Figuras 77 y 78, vemos que la prevalencia de Concepto es del 69,6%, mientras que el 30,4% restante corresponde a Omisión.

Tabla 62
Cruce de las variables Contexto y Tipo de error en el Libro 2.

Contexto		Tipo				Total
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	
Teoría	Recuento	8	7	0	0	15
	% de Contexto	53,3%	46,7%	0,0%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	24,2%	10,6%	0,0%	0,0%	8,2%
	% del total	4,4%	3,8%	0,0%	0,0%	8,2%
Problema	Recuento	25	59	39	44	167
	% de Contexto	15,0%	35,3%	23,4%	26,3%	100,0%
	% de Tipo	75,8%	89,4%	100,0%	100,0%	91,8%
	% del total	13,7%	32,4%	21,4%	24,2%	91,8%
Total	Recuento	33	66	39	44	182
	% de Contexto	18,1%	36,3%	21,4%	24,2%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	18,1%	36,3%	21,4%	24,2%	100,0%

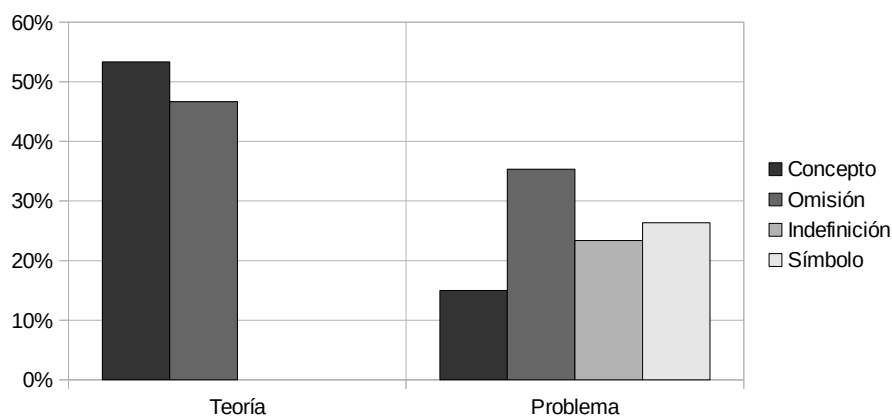


Figura 77: Valores de la variable Tipo por cada valor de Contexto en el Libro 2.

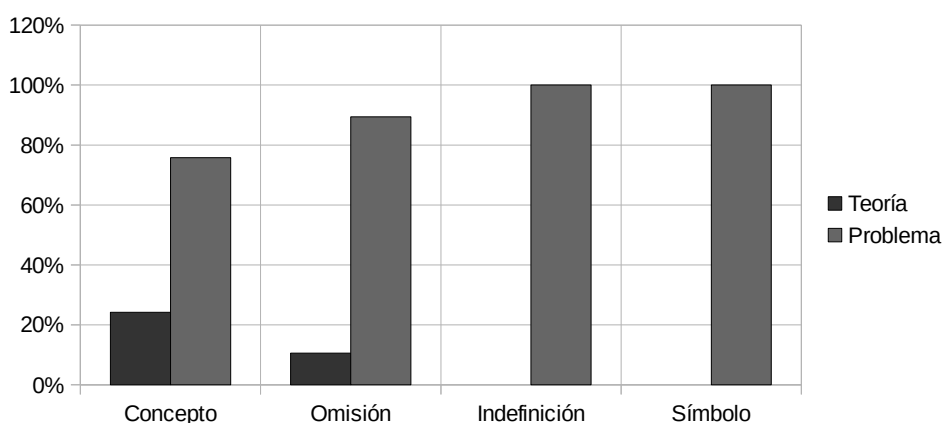


Figura 78: Valores de la variable Contexto por cada valor de Tipo en el Libro 2.

En cuanto a los Problemas, suponen el 100% de los errores de Indefinición y de Símbolo, bajando el porcentaje de Omisión al 89,4% y de Concepto al 75,8%.

Ponderando por el número de errores de cada Tipo, nos encontramos un equilibrio relativo entre ellos: el 27,4% para Indefinición y Símbolo, el 24,5% para Omisión y el 20,7% restante para Concepto. Es notable el parecido, aun siendo los resultados más dispares de todos los Libros.

El Libro 3, aunque posee errores en todos los Tipos en ambos Contextos, tiene una repartición de los mismos diferente al caso en que tomamos toda la muestra.

La mayor parte de los errores de Teoría son de Símbolo (50%), seguidos de los de Omisión (34,4%), Indefinición (9,4%) y finalmente Concepto (6,3%). Sin embargo, si ponderamos estas cifras con el número de errores de cada Tipo para conocer el porcentaje real, obtenemos que Teoría se compone de un 40,8% de Omisión, un 30,6% de Símbolo, un 16,8% de Concepto y un 11,8% de Indefinición. Los datos se encuentran en la Tabla 63 y en las Figuras 79 y 80.

En cuanto a Problema, los porcentajes difieren de la muestra completa. Tenemos un 90,6% de errores de Indefinición, un 86,7% de los errores de Concepto, un 75,8% de los errores de Símbolo y tan solo un 67,6% de errores de Omisión. Al ponderar por el número de errores de cada Tipo, tenemos que los porcentajes pasan a ser un 28,3% de Indefinición, un 27,0% de Concepto, un 23,6% de Símbolo y un 21,1% de Omisión. Aunque rondan el reparto equitativo, quedan ligeramente distantes de éste.

Tabla 63
Cruce de las variables Contexto y Tipo de error en el Libro 3.

	Contexto	Tipo				Total
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	
Teoría	Recuento	2	11	3	16	32
	% de Contexto	6,3%	34,4%	9,4%	50,0%	100,0%
	% de Tipo	13,3%	32,4%	9,4%	24,2%	21,8%
	% del total	1,4%	7,5%	2,0%	10,9%	21,8%
Problema	Recuento	13	23	29	50	115
	% de Contexto	11,3%	20,0%	25,2%	43,5%	100,0%
	% de Tipo	86,7%	67,6%	90,6%	75,8%	78,2%
	% del total	8,8%	15,6%	19,7%	34,0%	78,2%
Total	Recuento	15	34	32	66	147
	% de Contexto	10,2%	23,1%	21,8%	44,9%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	10,2%	23,1%	21,8%	44,9%	100,0%

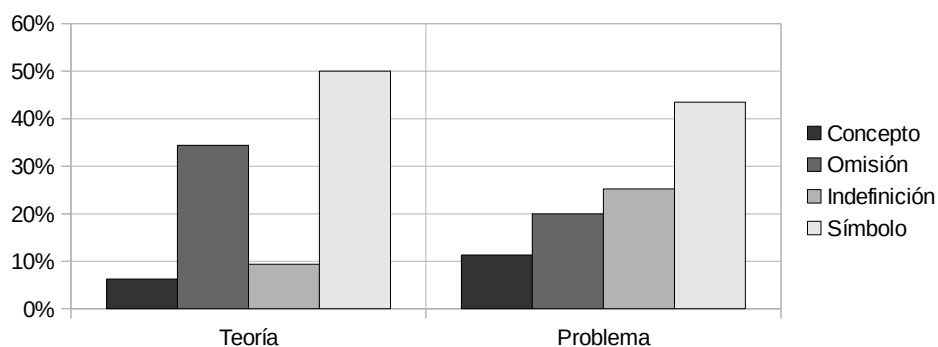


Figura 79: Valores de la variable Tipo por cada valor de Contexto en el Libro 3.

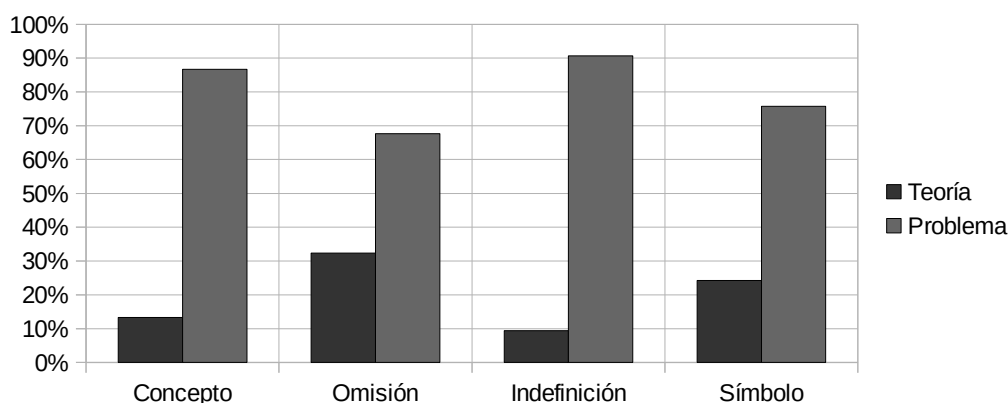


Figura 80: Valores de la variable Contexto por cada valor de Tipo en el Libro 3.

El Libro 4 carece de errores de Indefinición en Teoría, al igual que el Libro 2.

Como podemos ver en la Tabla 64 y en las Figuras 81 y 82, aunque la composición de los errores de Teoría es de 40,0% de Concepto y 30,0% de Omisión y de Símbolo, la ponderación por el número de errores de cada tipo nos limita fuertemente el peso de los errores de Símbolo y nos informa de que la influencia de Concepto en Teoría es del 48,0%, la de Omisión es del 38,0% y la de Símbolo solamente llega al 14,0%.

En cambio, la composición de Problema es mucho más regular. Aunque por números brutos ésta es de un 52,9% de Símbolo, un 17,2% para Concepto y Omisión y un 12,6% para Indefinición, una vez ponderamos por el número de errores de cada uno de los Tipos obtenemos que Indefinición tiene un 28,1%, Símbolo un 26,4%, Omisión un 23,4% y por último Concepto un 22,2%.

En cuanto al porcentaje de errores de Problema por cada Tipo, éste va del 100% de Indefinición hasta el 78,9% de Concepto, pasando por el 93,9% de Símbolo y el 83,3% de Omisión.

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

Tabla 64

Cruce de las variables Contexto y Tipo de error en el Libro 4.

Contexto		Tipo				Total
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	
Teoría	Recuento	4	3	0	3	10
	% de Contexto	40,0%	30,0%	0,0%	30,0%	100,0%
	% de Tipo	21,1%	16,7%	0,0%	6,1%	10,3%
	% del total	4,1%	3,1%	0,0%	3,1%	10,3%
Problema	Recuento	15	15	11	46	87
	% de Contexto	17,2%	17,2%	12,6%	52,9%	100,0%
	% de Tipo	78,9%	83,3%	100,0%	93,9%	89,7%
	% del total	15,5%	15,5%	11,3%	47,4%	89,7%
Total	Recuento	19	18	11	49	97
	% de Contexto	19,6%	18,6%	11,3%	50,5%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	19,6%	18,6%	11,3%	50,5%	100,0%

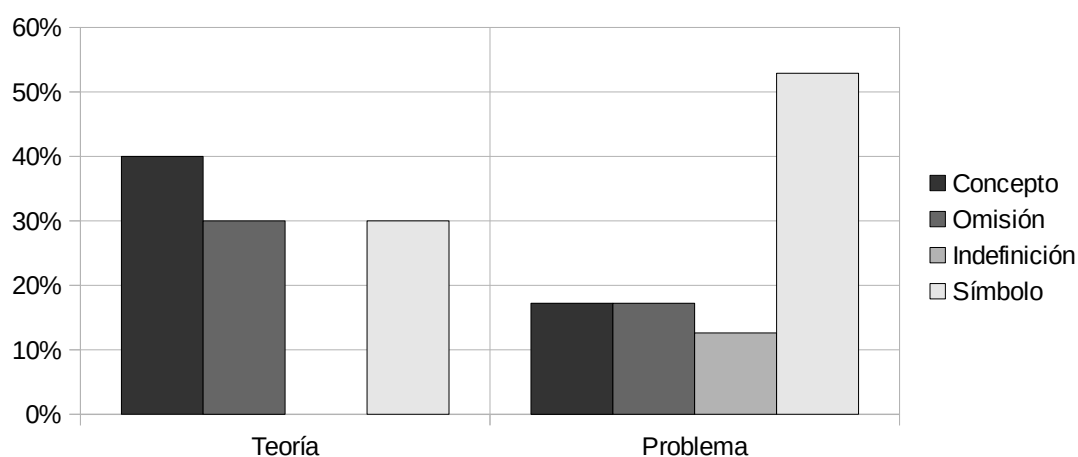


Figura 81: Valores de la variable Tipo por cada valor de Contexto en el Libro 4.

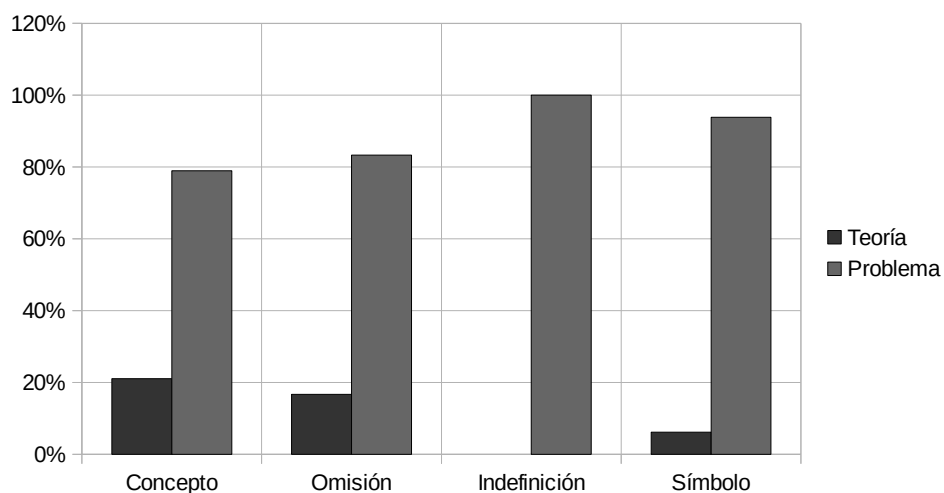


Figura 82: Valores de la variable Contexto por cada valor de Tipo en el Libro 4.

8.2.10. Clasificación por Bloque de contenido y Tipo de error

La distribución de errores al cruzar el Bloque de contenido y el Tipo de error nos muestra que ésta es muy irregular. Dado que la enorme cantidad de errores del Bloque Medida distorsiona los porcentajes de dicho Bloque en cada Tipo de error, ha sido necesario realizar una ponderación por el número de errores de cada Bloque para percibir la verdadera afinidad de cada Bloque por cada uno de los Tipos.

En la composición por Tipos de cada Bloque, vemos que Aritmética tiene una composición mayoritaria de Indefinición (48,1%), seguida de Omisión (24,8%), Símbolo (18,0%) y finalmente Concepto (9,0%). Por su parte, Medida es mayoritariamente Símbolo (46,3%), seguida por Omisión (29,3%), Concepto (16,1%) e Indefinición (8,4%). A continuación, Geometría es la menos descompensada (y aun así tiene una composición muy irregular), al constar de un 39,3% de errores de Omisión, un 32,1% de Concepto, un 21,4% de Indefinición y un pequeño 7,1% de errores de Símbolo. Análisis de datos está compuesta mayoritariamente de Indefinición (68,3%), seguida de Omisión (19,5%) y Concepto (12,2%). En Análisis de datos no se han identificado errores de Símbolo. Por último, los errores de Álgebra son fundamentalmente de Omisión (42,9%), seguido por Indefinición (35,7%) y Símbolo (21,4%). En Álgebra no se han encontrado errores de Concepto.

En cuanto al porcentaje de Bloques en cada Tipo, como decíamos al principio de este apartado, la gran proporción de errores de Medida impregna prácticamente todos los Tipos de error, ocultando las verdaderas prevalencias. En números brutos, Concepto contiene un 73,2% de errores de Medida, un 12,4% de errores de Aritmética, un 9,3% de errores de Geometría y ningún error de Álgebra. En el caso de Omisión tenemos un 64,8% de Medida, un 16,6% de Aritmética, un 9,0% de Álgebra, un 5,5% de Geometría y un 4,0% de errores de Análisis de datos. Indefinición rompe la dinámica de dominio de Medida y se compone mayoritariamente de errores de Aritmética (42,7%), dejando un 24,7% a la Medida, un 18,7% al Análisis de datos, un 10% al Álgebra y por último un 4% a la Geometría. Por último, Símbolo reafirma la presencia de Medida con un 85,4%, seguido por Aritmética (10,0%), Álgebra (3,8%) y Geometría (0,8%). No se han encontrado errores de Símbolo en Análisis de datos. Estos datos, debido a la abundancia de errores de Medida, merecen ser considerados en relación al total de errores de cada Bloque, al igual que hicimos en el cruce Bloque x Tipo para conocer la auténtica inclinación de cada Bloque a engendrar errores de un Tipo determinado.

Todos los datos se encuentran en la Tabla 65 y en las Figuras 83 y 84.

Tabla 65

Cruce de las variables Bloque y Tipo.

Bloque		Tipo				Total
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	
Aritmética	Recuento	12	33	64	24	133
	% de Bloque	9,0%	24,8%	48,1%	18,0%	100,0%
	% de Tipo	12,4%	16,6%	42,7%	10,0%	19,4%
	% del total	1,8%	4,8%	9,3%	3,5%	19,4%
Medida	Recuento	71	129	37	204	441
	% de Bloque	16,1%	29,3%	8,4%	46,3%	100,0%
	% de Tipo	73,2%	64,8%	24,7%	85,4%	64,4%
	% del total	10,4%	18,8%	5,4%	29,8%	64,4%
Geometría	Recuento	9	11	6	2	28
	% de Bloque	32,1%	39,3%	21,4%	7,1%	100,0%
	% de Tipo	9,3%	5,5%	4,0%	0,8%	4,1%
	% del total	1,3%	1,6%	0,9%	0,3%	4,1%
Análisis de datos	Recuento	5	8	28	0	41
	% de Bloque	12,2%	19,5%	68,3%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	5,2%	4,0%	18,7%	0,0%	6,0%
	% del total	0,7%	1,2%	4,1%	0,0%	6,0%
Álgebra	Recuento	0	18	15	9	42
	% de Bloque	0,0%	42,9%	35,7%	21,4%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	9,0%	10,0%	3,8%	6,1%
	% del total	0,0%	2,6%	2,2%	1,3%	6,1%
Total	Recuento	97	199	150	239	685
	% de Bloque	14,2%	29,1%	21,9%	34,9%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	14,2%	29,1%	21,9%	34,9%	100,0%

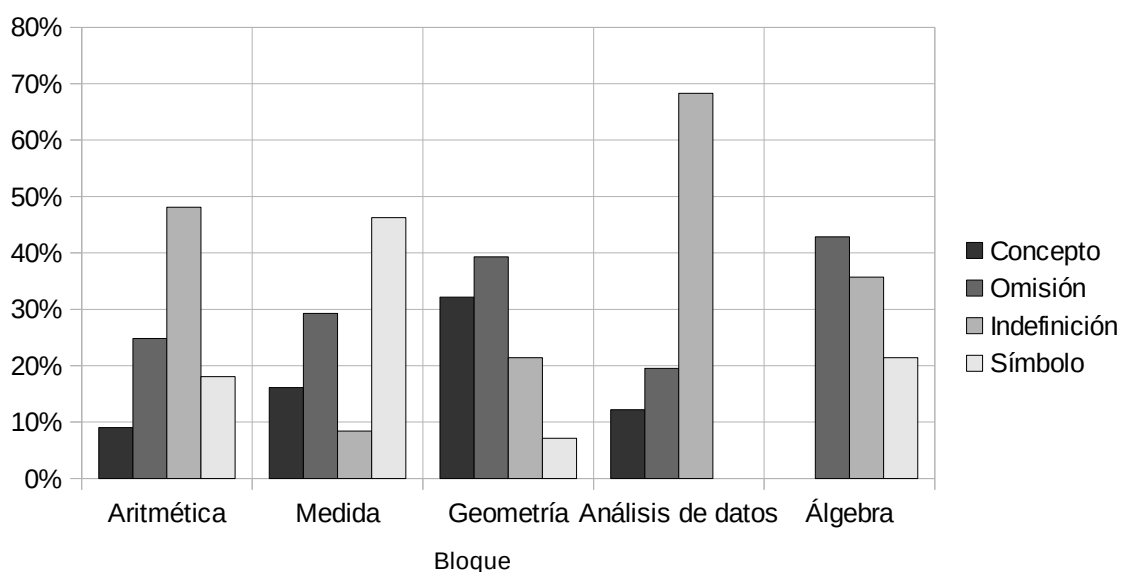


Figura 83: Valores de la variable Tipo en cada valor de la variable Bloque

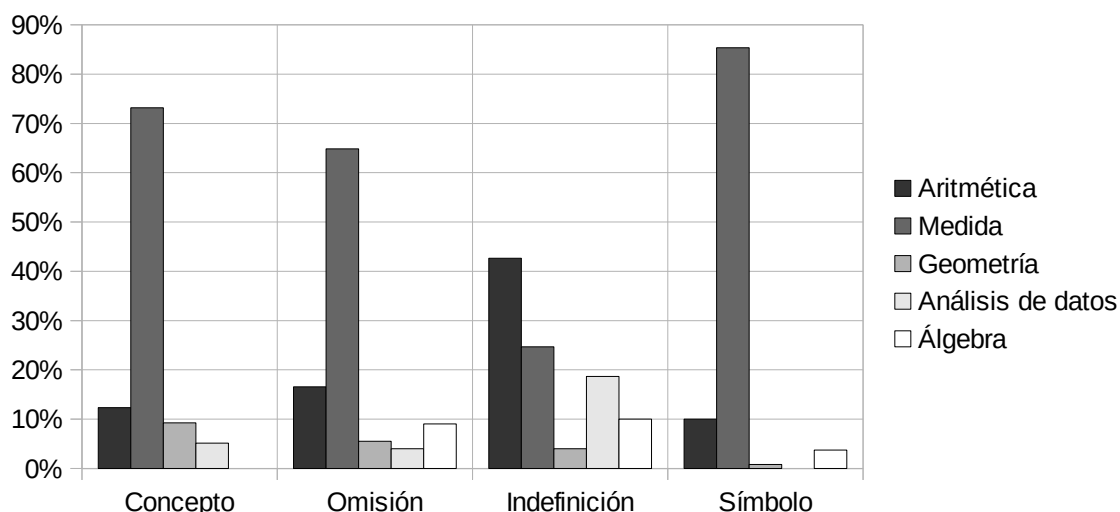


Figura 84: Valores de la variable Bloque por cada valor de la variable Tipo.

Una vez realizada la ponderación, los resultados que se muestran en la tabla anterior son muy diferentes. El Bloque más proclive a generar errores de Tipo Concepto es Geometría (con una tendencia el doble de la que tiene Medida). En el caso de Omisión, es el bloque Álgebra el que tiene la mayor inclinación. Los errores de Indefinición, por su parte, son el Tipo preferido por el Bloque Análisis de datos (por su parte, es Medida el Bloque que menor inclinación tiene a generar errores de Indefinición, a pesar de que un 25% de los errores de Indefinición son del Bloque Medida). Por último, definitivamente es Medida el Bloque con mayor tendencia a generar errores de Símbolo. En la Tabla 66 se muestran estos valores ponderados.

Tabla 66

Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque.

Bloque	Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo
Aritmética	1	1,27	5,74	2,53
Medida	1,78	1,50	1	6,48
Geometría	3,56	2,01	2,55	1
Análisis de datos	1,35	1	8,14	0
Álgebra	0	2,20	4,26	3,00

Estudiemos ahora cada Libro por separado. El Libro 1 muestra que los errores pertenecientes al Bloque Aritmética se componen en su mayoría por errores de Indefinición (47,5%), seguidos por Omisión (28,8%) y, en igual proporción, Concepto y Símbolo (11,9%). Por su parte, Medida está fundamentalmente compuesto por Símbolo (44,8%) y a continuación Omisión (31,2%). Indefinición y Concepto tienen

representaciones más bajas (12,3% y 11,7% respectivamente). Los errores del Bloque Geometría son primordialmente de Omisión (53,8%), seguidos a partes iguales por Concepto e Indefinición (con un 23,1% cada uno). El Bloque Análisis de datos se concentran en Indefinición (77,8%), con Concepto y Omisión repartiéndose el resto (11,1% cada uno). Por último, el Bloque Álgebra presenta mayoritariamente errores de Omisión (46,7%), con Indefinición y Símbolo a partes iguales en el resto (26,7% cada uno).

Si consideramos la composición de los errores de cada Tipo, podemos ver que es Medida el Bloque dominante en casi todos los Tipos. Así, supone un 60% de los errores de Concepto, un 59,3% de los de Omisión y un 86,3% de los de Símbolo. Solamente Indefinición tiene una mayor frecuencia de errores de Aritmética (41,2%). Los datos se pueden ver en la Tabla 67 y en las Figuras 85 y 86.

Tabla 67
Cruce de las variables Bloque y Tipo en el Libro 1.

Bloque		Tipo				Total
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	
Aritmética	Recuento	7	17	28	7	59
	% de Bloque	11,9%	28,8%	47,5%	11,9%	100,0%
	% de Tipo	23,3%	21,0%	41,2%	8,8%	22,8%
	% del total	2,7%	6,6%	10,8%	2,7%	22,8%
Medida	Recuento	18	48	19	69	154
	% de Bloque	11,7%	31,2%	12,3%	44,8%	100,0%
	% de Tipo	60,0%	59,3%	27,9%	86,3%	59,5%
	% del total	6,9%	18,5%	7,3%	26,6%	59,5%
Geometría	Recuento	3	7	3	0	13
	% de Bloque	23,1%	53,8%	23,1%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	10,0%	8,6%	4,4%	0,0%	5,0%
	% del total	1,2%	2,7%	1,2%	0,0%	5,0%
Análisis de datos	Recuento	2	2	14	0	18
	% de Bloque	11,1%	11,1%	77,8%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	6,7%	2,5%	20,6%	0,0%	6,9%
	% del total	0,8%	0,8%	5,4%	0,0%	6,9%
Álgebra	Recuento	0	7	4	4	15
	% de Bloque	0,0%	46,7%	26,7%	26,7%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	8,6%	5,9%	5,0%	5,8%
	% del total	0,0%	2,7%	1,5%	1,5%	5,8%
Total	Recuento	30	81	68	80	259
	% de Bloque	11,6%	31,3%	26,3%	30,9%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	11,6%	31,3%	26,3%	30,9%	100,0%

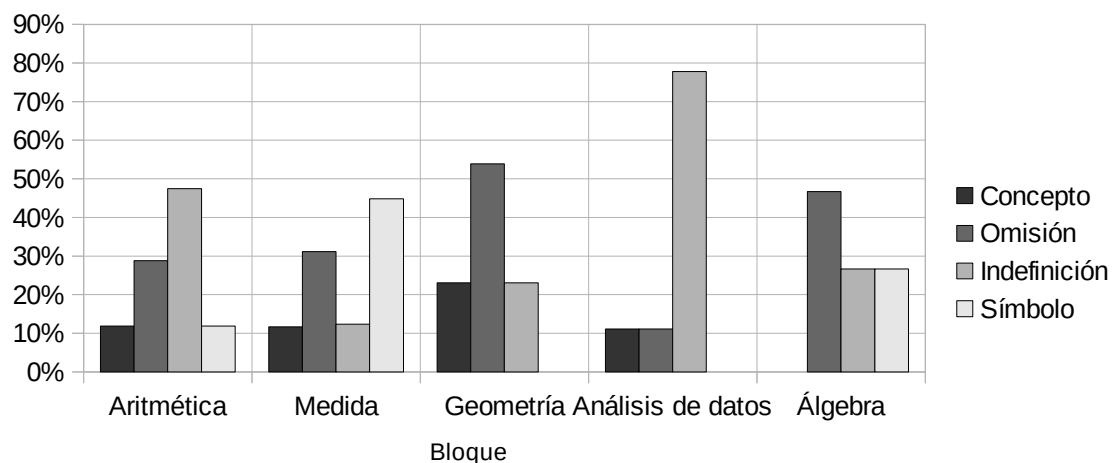


Figura 85: Valores de la variable Tipo por cada valor de la variable Bloque en el Libro 1.

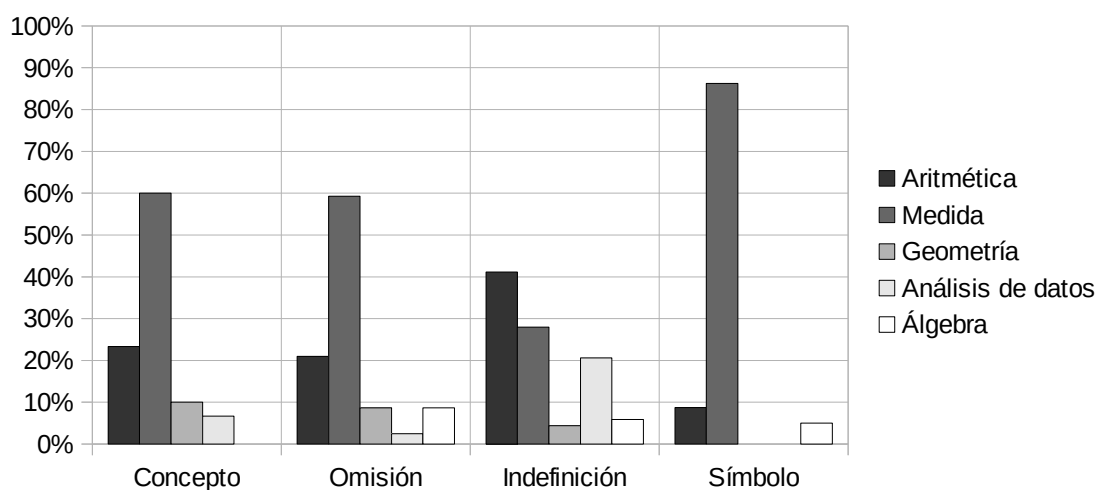


Figura 86: Valores de la variable Bloque por cada valor de la variable Tipo en el Libro 1.

Al igual que se hizo en la muestra completa, conviene ponderar estos valores sobre el número de errores de cada Bloque para conocer la afinidad de cada uno de ellos. Los resultados se encuentran en la Tabla 68.

Tabla 68

Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque en el Libro 1.

Bloque	Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo
Aritmética	3,50	8,50	9,33	1,75
Medida	9,00	24,00	6,33	17,25
Geometría	1,50	3,50	1	0
Análisis de datos	1	1	4,67	0
Álgebra	0	3,50	1,33	1

Como podemos ver, en el Libro 1 verdaderamente Medida prevalece como el Bloque más proclive a generar errores tanto de Concepto como de Omisión y especialmente de Símbolo. Solamente en otro Tipo, Indefinición, es otro Bloque más característico, en este caso Aritmética.

El Libro 2, por su parte, muestra ciertas diferencias con el Libro 1, especialmente en el reparto por Tipos de error en cada Bloque. Una característica de este libro es que todos los errores del Tipo Símbolo pertenecen al bloque Medida.

Como podemos ver en la Tabla 69 y en las Figuras 87 y 88, en Aritmética la mayor parte de los errores son de Indefinición (un 65,2%), seguido por Omisión (21,7%) y por último Concepto (13,0%). Medida, que es el único Bloque que presenta errores de todos los Tipos, se compone de un 40,2% de errores de Omisión, un 34,6% de errores de Símbolo, un 18,9% de errores de Concepto y finalmente un 6,3% de errores de Indefinición. Geometría solamente cuenta con errores de Concepto (75,0%) y de Omisión (25,0%). Análisis de datos se compone principalmente de Indefinición (50%) y en menor medida de Omisión (33,3%) y Concepto (16,7%). Por último, Álgebra solamente se compone de errores de Indefinición (70,0%) y de Omisión (30,0%).

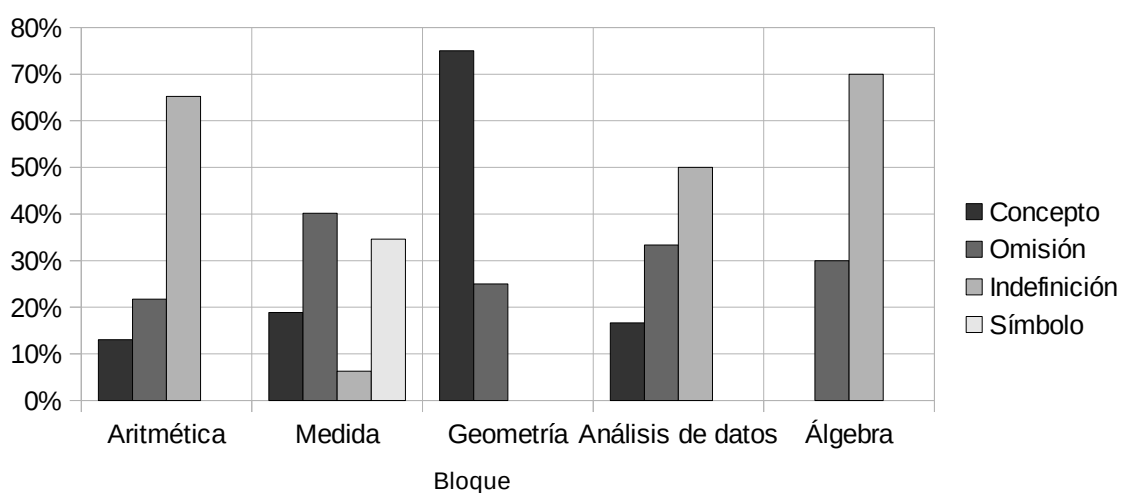


Figura 87: Valores de la variable Tipo por cada valor de la variable Bloque en el Libro 2.

Tabla 69
Cruce de las variables Bloque y Tipo en el Libro 2.

	Bloque	Tipo				Total
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	
Aritmética	Recuento	3	5	15	0	23
	% de Bloque	13,0%	21,7%	65,2%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	9,1%	7,6%	38,5%	0,0%	12,6%
	% del total	1,6%	2,7%	8,2%	0,0%	12,6%
Medida	Recuento	24	51	8	44	127
	% de Bloque	18,9%	40,2%	6,3%	34,6%	100,0%
	% de Tipo	72,7%	77,3%	20,5%	100,0%	69,8%
	% del total	13,2%	28,0%	4,4%	24,2%	69,8%
Geometría	Recuento	3	1	0	0	4
	% de Bloque	75,0%	25,0%	0,0%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	9,1%	1,5%	0,0%	0,0%	2,2%
	% del total	1,6%	0,5%	0,0%	0,0%	2,2%
Análisis de datos	Recuento	3	6	9	0	18
	% de Bloque	16,7%	33,3%	50,0%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	9,1%	9,1%	23,1%	0,0%	9,9%
	% del total	1,6%	3,3%	4,9%	0,0%	9,9%
Álgebra	Recuento	0	3	7	0	10
	% de Bloque	0,0%	30,0%	70,0%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	4,5%	17,9%	0,0%	5,5%
	% del total	0,0%	1,6%	3,8%	0,0%	5,5%
Total	Recuento	33	66	39	44	182
	% de Bloque	18,1%	36,3%	21,4%	24,2%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	18,1%	36,3%	21,4%	24,2%	100,0%

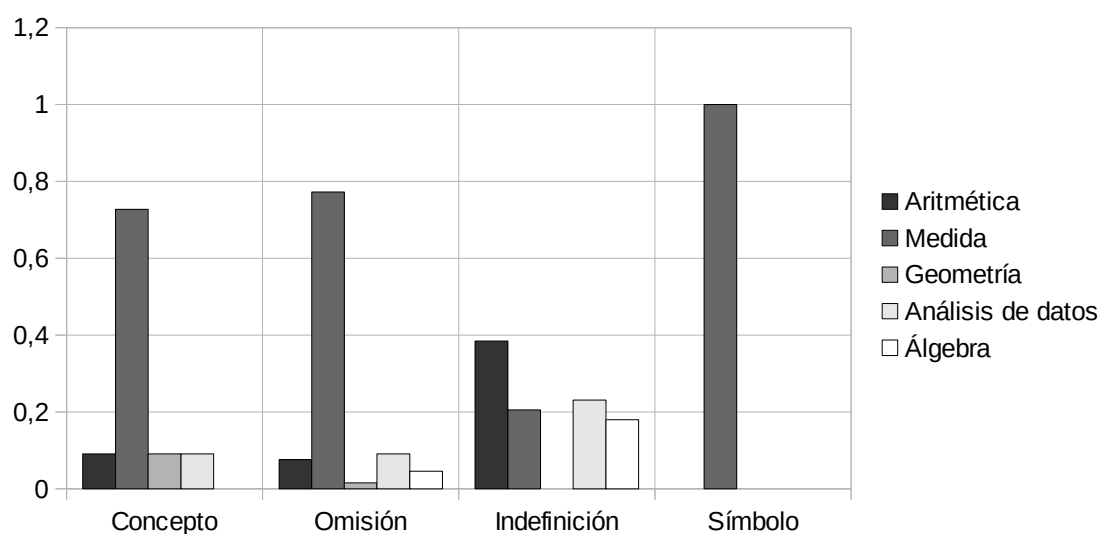


Figura 88: Valores de la variable Bloque por cada valor de la variable Tipo en el Libro 2.

En cuanto a los Bloques que integran cada uno de los tipos, este libro no es esencialmente diferente a la tendencia general: Medida domina en tres Tipos, quedando Indefinición más repartido. En Concepto tenemos el 72,7% de errores de Medida, quedando Aritmética, Geometría y Análisis de datos con un 9,1% cada uno. Similarmente, Omisión contiene un 77,3% de errores de Medida, un 9,1% de Análisis de datos, un 7,6% de Aritmética, un 4,5% de Álgebra y un 1,5% de Geometría. Indefinición, que decíamos es el más repartido (aunque no posee errores de Geometría) contiene un 38,5% de Aritmética, un 23,1% de Análisis de datos, un 20,5% de Medida y un 17,9% de Álgebra. Por último, Símbolo está compuesto al 100% de errores de Medida.

Por supuesto, y como hemos hecho anteriormente, la ponderación por el número de errores de cada Bloque es conveniente para desenmascarar las tendencias reales de cada Bloque para engendrar errores de un Tipo u otro. Así, comprobamos que Geometría es el Bloque más proclive a generar errores de Concepto. En el caso de Omisión no hay grandes diferencias entre unos y otros como en otros libros y en la muestra completa, pero es Medida el Bloque que tiene (ligeramente por encima de Análisis de datos) mayor afinidad por este Tipo. Indefinición es más extremo, y aunque Álgebra es el Bloque con mayor afinidad, Aritmética tiene muy poca menos. Símbolo es un caso particular por ser el único Tipo en el que todos los errores son del mismo Bloque, Medida. Los datos se encuentran en la Tabla 70.

Tabla 70

Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque en el Libro 2.

Bloque	Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo
Aritmética	1	1	10,35	0
Medida	1,45	1,85	1	1
Geometría	5,75	1,15	0	0
Análisis de datos	1,28	1,53	7,94	0
Álgebra	0	1,38	11,11	0

El Libro 3 vuelve a desmarcarse en varios aspectos de la tendencia general. En este caso, una de las características de este libro es que todos los errores de Análisis de datos son a su vez de Indefinición. Aparte, solamente Aritmética y Medida componen los errores de Concepto.

En la composición por Tipo de error de cada Bloque de contenidos, nos encontramos con que en Aritmética el 42,1% de los errores son de Indefinición, el 31,6% son de Símbolo, el 21,1% son de Omisión y el 5,3% restante son de Concepto. Medida nuevamente viene representada por los errores de Símbolo (57,0%), y a buena distancia Omisión (19,8%), Concepto (15,1%) e Indefinición (8,1%). Geometría, con solamente 6 errores, se los reparte a partes iguales entre Omisión, Indefinición y Símbolo (un 33,3% cada uno). Como ya vimos antes, el 100% de los errores de Análisis de datos son de Indefinición. Por último, Álgebra contiene fundamentalmente errores de Omisión (50,0%), seguido por Indefinición (28,6%) y por último Símbolo (21,4%).

En lo tocante a los Bloques que componen cada Tipo, Concepto contiene un 86,7% de errores de Medida y el 13,3% restante es de Aritmética. Omisión se compone de un 50,0% de errores de Medida, un 23,5% de Aritmética, un 20,6% de Álgebra y un 5,9% de Geometría. Indefinición, el único Tipo en el que Medida no es predominante, contiene un 50,0% de errores de Aritmética, un 21,9% de Medida, un 12,5% de Álgebra, un 9,4% de Análisis de datos y el 6,3% restante corresponde a Geometría. Por último, Símbolo también posee un fuerte desequilibrio al encontrarse con un 74,2% de errores de Medida frente a tan solo un 18,2% de Aritmética, un 4,5% de Álgebra y un 3,0% de Geometría. Todos los datos se encuentran en la Tabla 71 y en las Figuras 89 y 90.

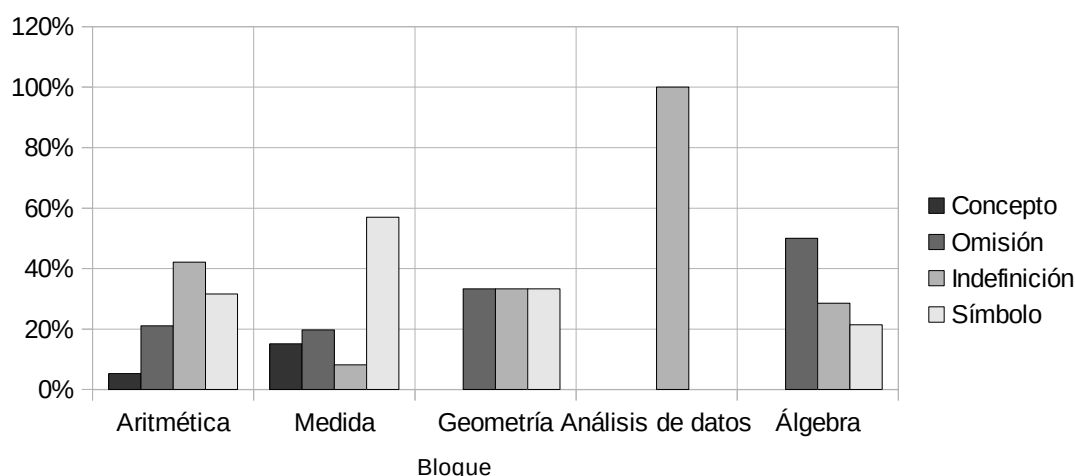


Figura 89: Valores de la variable Tipo por cada valor de la variable Bloque en el Libro 3.

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

Tabla 71

Cruce de las variables Bloque y Tipo en el Libro 3.

Bloque		Tipo				Total
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	
Aritmética	Recuento	2	8	16	12	38
	% de Bloque	5,3%	21,1%	42,1%	31,6%	100,0%
	% de Tipo	13,3%	23,5%	50,0%	18,2%	25,9%
	% del total	1,4%	5,4%	10,9%	8,2%	25,9%
Medida	Recuento	13	17	7	49	86
	% de Bloque	15,1%	19,8%	8,1%	57,0%	100,0%
	% de Tipo	86,7%	50,0%	21,9%	74,2%	58,5%
	% del total	8,8%	11,6%	4,8%	33,3%	58,5%
Geometría	Recuento	0	2	2	2	6
	% de Bloque	0,0%	33,3%	33,3%	33,3%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	5,9%	6,3%	3,0%	4,1%
	% del total	0,0%	1,4%	1,4%	1,4%	4,1%
Análisis de datos	Recuento	0	0	3	0	3
	% de Bloque	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	0,0%	9,4%	0,0%	2,0%
	% del total	0,0%	0,0%	2,0%	0,0%	2,0%
Álgebra	Recuento	0	7	4	3	14
	% de Bloque	0,0%	50,0%	28,6%	21,4%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	20,6%	12,5%	4,5%	9,5%
	% del total	0,0%	4,8%	2,7%	2,0%	9,5%
Total	Recuento	15	34	32	66	147
	% de Bloque	10,2%	23,1%	21,8%	44,9%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	10,2%	23,1%	21,8%	44,9%	100,0%

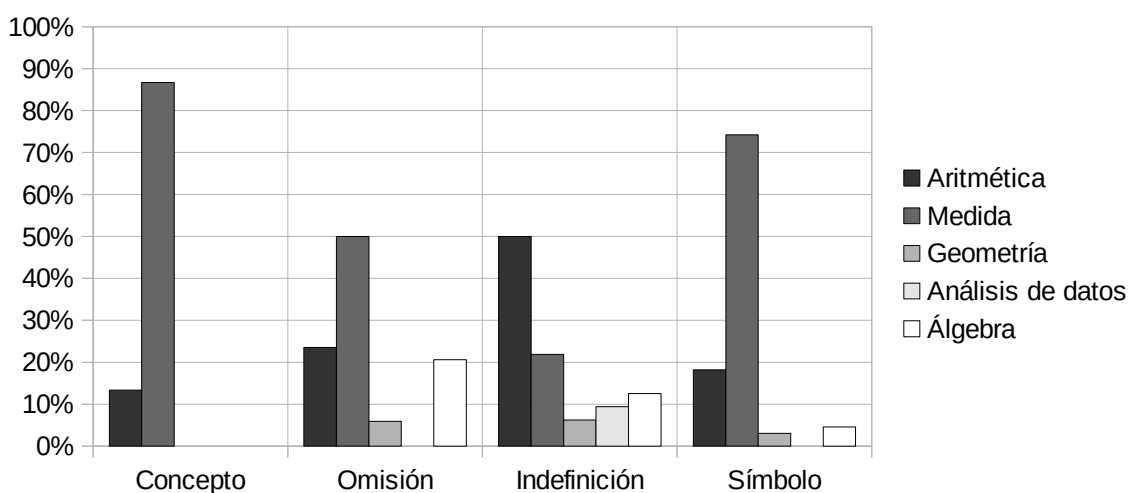


Figura 90: Valores de la variable Bloque por cada valor de la variable Tipo en el Libro 3.

Sin embargo, al ponderar los datos (ver Tabla 72) comprobamos que, una vez más, la ponderación por número de errores de cada Bloque nos permite interpretar correctamente la situación. Es Medida el Bloque más proclive a generar errores tanto de Concepto como de Símbolo, aunque no con la diferencia que parece desprenderse de la última Figura. En cuanto a Omisión, sorprendentemente es Álgebra el Bloque más afín. Por último, como cabe esperar el Bloque más proclive a generar errores de Indefinición es Análisis de datos, pues de hecho es el único Tipo al que pertenecen los errores de este Bloque.

Tabla 72

Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque en el Libro 3.

Bloque	Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo
Aritmética	1	1,07	5,17	1,47
Medida	2,87	1	1	2,66
Geometría	0	1,69	4,10	1,56
Análisis de datos	0	0	12,29	0
Álgebra	0	2,53	3,51	1

Al igual que sucedía en el Libro 3, en el Libro 4 los errores de Análisis de datos (solamente dos han sido identificados) son de Indefinición, aunque el reparto de Bloques en otros Tipos es diferente.

Para empezar, Aritmética se compone, mayoritariamente y por partes iguales, de Indefinición y de Símbolo (con un 38,5% cada uno), y después por Omisión (23,1%). Medida contiene sobre todo errores de Símbolo (56,8%), seguido por Concepto (21,6%), Omisión (17,6%) y finalmente Indefinición (4,1%). Geometría se nutre fundamentalmente de Concepto (60,0%), seguido por Omisión e Indefinición (con un 20,0% cada uno). Cabe destacar aquí que solamente son 5 los errores de Geometría en este Libro 4. Como vimos antes, los dos únicos errores de Análisis de datos se encuadran en Indefinición. Por último, los errores de Álgebra son mayoritariamente de Símbolo (66,7%) y a continuación Omisión (33,3%). Es relevante en este caso también que el total de errores de Álgebra asciende tan solo a 3.

En cuanto a los Bloques que componen cada Tipo, los números no son esencialmente distintos a los de libros anteriores. Concepto contiene un 84,2% de Medida más un 15,8% de Geometría. Omisión, también un mayoritario 72,2% de Medida junto con un 16,7% de Aritmética y un 5,6% tanto en Geometría como en Álgebra. Indefinición vuelve a ser, como anteriormente, el Tipo en el que el Bloque más numeroso es Aritmética, con un 45,5%. Medida supone el 27,3%, Análisis de datos el 18,2% y finalmente Geometría el 9,1% restante. Por último, Símbolo se compone

en su mayoría por errores de Medida (85,7%), quedando un 10,2% para Aritmética y el 4,1% restante para Álgebra. Todos los datos se encuentran en la Tabla 73 y en las Figuras 91 y 92.

Tabla 73
Cruce de las variables Bloque y Tipo en el Libro 4.

Bloque		Tipo				Total
		Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo	
Aritmética	Recuento	0	3	5	5	13
	% de Bloque	0,0%	23,1%	38,5%	38,5%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	16,7%	45,5%	10,2%	13,4%
	% del total	0,0%	3,1%	5,2%	5,2%	13,4%
Medida	Recuento	16	13	3	42	74
	% de Bloque	21,6%	17,6%	4,1%	56,8%	100,0%
	% de Tipo	84,2%	72,2%	27,3%	85,7%	76,3%
	% del total	16,5%	13,4%	3,1%	43,3%	76,3%
Geometría	Recuento	3	1	1	0	5
	% de Bloque	60,0%	20,0%	20,0%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	15,8%	5,6%	9,1%	0,0%	5,2%
	% del total	3,1%	1,0%	1,0%	0,0%	5,2%
Análisis de datos	Recuento	0	0	2	0	2
	% de Bloque	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	0,0%	18,2%	0,0%	2,1%
	% del total	0,0%	0,0%	2,1%	0,0%	2,1%
Álgebra	Recuento	0	1	0	2	3
	% de Bloque	0,0%	33,3%	0,0%	66,7%	100,0%
	% de Tipo	0,0%	5,6%	0,0%	4,1%	3,1%
	% del total	0,0%	1,0%	0,0%	2,1%	3,1%
Total	Recuento	19	18	11	49	97
	% de Bloque	19,6%	18,6%	11,3%	50,5%	100,0%
	% de Tipo	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% del total	19,6%	18,6%	11,3%	50,5%	100,0%

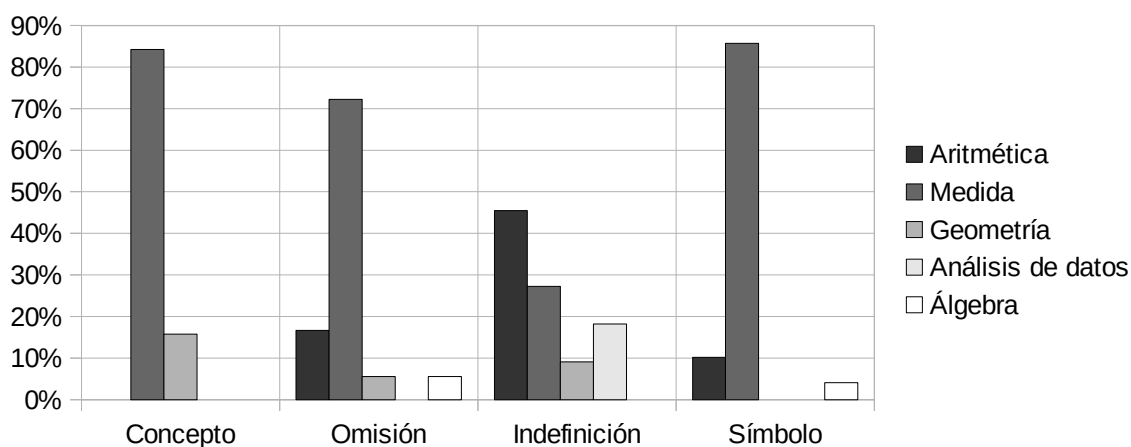


Figura 91: Valores de la variable Bloque por cada valor de la variable Tipo en el Libro 4.

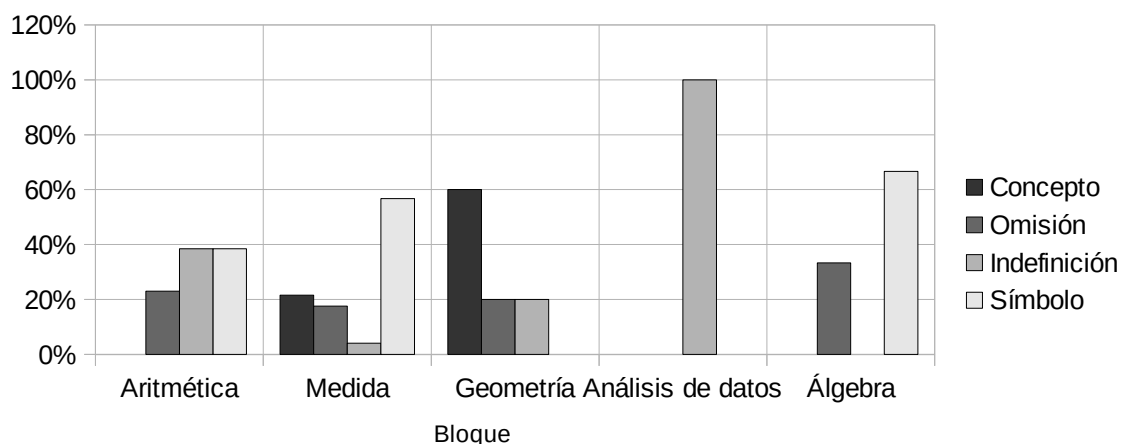


Figura 92: Valores de la variable Tipo por cada valor de la variable Bloque en el Libro 4.

Al igual que en los libros anteriores, la ponderación para determinar la afinidad por cada Tipo de cada Bloque es necesaria debido a la enorme desproporción de errores entre Bloques (ver Tabla 74). Así, podemos ver que Geometría es el Bloque con mayor afinidad por Concepto (a pesar de ser mucho menos numeroso en porcentaje). En Omisión hay un mayor equilibrio, pero es Álgebra el Bloque con mayor tendencia a generar errores de este Tipo (aunque no llega al doble del caso base, Medida). En Indefinición, la inexistencia de errores de Análisis de datos en otros Tipos hacen que la afinidad de Análisis de datos por Indefinición sea máxima. Por último, en Símbolo no es Medida el Bloque con mayor predisposición, sino Álgebra.

Tabla 74

Composición de cada Tipo ponderada por la frecuencia de Bloque en el Libro 4.

Bloque	Concepto	Omisión	Indefinición	Símbolo
Aritmética	0	1,31	9,49	1
Medida	1	1	1	1,48
Geometría	2,78	1,14	4,93	0
Análisis de datos	0	0	24,67	0
Álgebra	0	1,90	0	1,73

8.3. Análisis de las relaciones entre las clases de errores matemáticos

Esta última sección del capítulo va dedicada al análisis estadístico de las relaciones existentes entre las distintas variables, para dar cumplimiento al cuarto objetivo de la investigación. Se han realizado pruebas de correlación de Pearson y pruebas de homogeneidad, independencia y bondad de ajuste en diversas variables.

8.3.1. Correlación entre el número de errores y el número de páginas

Cabe preguntarse si existe una correlación lineal entre el número de páginas y el número de errores de cada Libro. Para ello se calculó el coeficiente de correlación de Pearson entre ambas variables, junto con la significación con un nivel de confianza del 95% y un nivel de significación igual a 0,05. Esta significación se calculó mediante un modelo unilateral, puesto que la correlación entre ambas variables, de existir, ha de ser positiva (cuantas más páginas, más errores se pueden encontrar).

Como se puede ver en la Tabla 75, aunque el coeficiente de correlación de Pearson alcanza un valor bastante cercano a 1 ($r=0,879$), la significación unilateral es mayor que el nivel de significación marcado ($p=0,060 > \alpha$) y por tanto el coeficiente de correlación no es significativo con un nivel de confianza del 95%. No podemos afirmar, pues, que el número de páginas y el número de errores en los distintos libros sigan una misma ley.

Tabla 75

Matriz de correlaciones entre el número de errores y el número de páginas de cada Libro.

		Errores	Páginas
Correlación de Pearson		1	0,879
Significación (unilateral, $\pm=0,05$)			0,060
Errores	Suma de cuadrados y productos cruzados	13939,000	8699,500
	Covarianza	4646,333	2899,667
	N	4	4

8.3.2. Bondad de ajuste: Número de errores de acuerdo al número de unidades de análisis en cada libro.

Mediante la prueba de bondad de ajuste de la frecuencia de la variable Libro de acuerdo al número de unidades de registro contenidas en ese libro podemos comprobar si los libros con mayor número de unidades de análisis contienen más errores. El número de unidades de registro en cada libro se encuentra en la Tabla 76.

Tabla 76

Número de unidades de registro en cada libro.

	Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	Total
Unidades de análisis	1012	877	683	392	3018

La hipótesis nula fue “el número de errores de cada libro se ajusta al número de unidades de análisis que contiene”. Los resultados de la prueba chi-cuadrado ($\chi^2=6,006$, significación asintótica=0,111) nos indican que no hay indicios para rechazar la hipótesis nula, por lo que se aceptaría: el número de errores en cada Libro se distribuye de la misma forma que el número de unidades de análisis. Los resultados se encuentran en la Tabla 77, a continuación.

Tabla 77

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores de un libro con el número de unidades de análisis de ese libro.

Libro	N observado	N esperado	Residual
Libro 1	259	233,9	25,1
Libro 2	182	202,7	-20,7
Libro 3	147	157,8	-10,8
Libro 4	97	90,6	6,4
Total	685		
Estadísticos de contraste			
Chi-cuadrado		6,006	
Grados de libertad		3	
Significación asintótica		0,111	

8.3.3. Bondad de ajuste: Errores por Capítulo de acuerdo al número de unidades de análisis en cada capítulo.

Después de ver una posible relación entre el número de unidades de análisis de un libro y el número de errores, se realizó la misma prueba sobre el número de unidades de análisis de los capítulos y el número de errores, tanto en común como sobre cada libro. Estos números se pueden ver en la Tabla 78, a continuación.

Tabla 78

Número de unidades de registro por Libro y Capítulo.

Capítulo	Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	Total
1	107	32	25	31	195
2	67	43	82	21	213
3	58	114	114	39	325
4	87	89	61	25	262
5	108	33	43	32	216
6	136	86	68	33	322
7	92	65	55	26	237
8	83	90	57	19	249
9	46	33	16	25	120
10	57	112	58	14	241
11	171	55	104	12	342
12	-	31	-	115	146
13	-	95	-	-	95
Total	1012	877	683	392	3018

La hipótesis nula fue “El número de errores en cada capítulo se ajusta al número de unidades de registro contenidas en ese capítulo”. Se realizaron las pruebas χ^2 sobre el conjunto de errores y sobre cada Libro en particular. Los resultados se pueden ver en las Tablas 79, 80, 81, 82 y 83.

Tabla 79

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores en cada Capítulo con el número de unidades de registro en ese Capítulo.

Capítulo	N observado	N esperado	Residual
1	30	45,1	-15,1
2	34	49,2	-15,2
3	30	75,1	-45,1
4	29	60,6	-31,6
5	58	49,9	8,1
6	70	74,4	-4,4
7	83	54,8	28,2
8	48	57,6	-9,6
9	81	27,7	53,3
10	52	55,7	-3,7
11	136	79,1	56,9
12	16	33,8	-17,8
13	18	22,0	-4,0
Total	685		
Estadísticos de contraste			
Chi-cuadrado		2224,552	
Grados de libertad		12	
Significación asintótica		0,000	

Tabla 80

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores en cada Capítulo con el número de unidades de registro en ese Capítulo en el Libro 1.

Capítulo	N observado	N esperado	Residual
1	17	27,4	-10,4
2	11	17,1	-6,1
3	9	14,8	-5,8
4	9	22,3	-13,3
5	12	27,6	-15,6
6	22	34,8	-12,8
7	37	23,5	13,5
8	20	21,2	-1,2
9	17	27,4	-10,4
10	11	17,1	-6,1
11	9	14,8	-5,8
12	9	22,3	-13,3
13	12	27,6	-15,6
Total	22	34,8	-12,8
Estadísticos de contraste			
Chi-cuadrado		93,910	
Grados de libertad		10	
Significación asintótica		0,000	

Tabla 81

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores en cada Capítulo con el número de unidades de registro en ese Capítulo en el Libro 2.

Capítulo	N observado	N esperado	Residual
1	7	6,7	0,3
2	3	9,0	-6,0
3	7	23,7	-16,7
4	6	6,9	-0,9
5	14	17,9	-3,9
6	14	17,9	-3,9
7	18	13,3	4,7
8	8	18,7	-10,7
9	48	6,9	41,1
10	31	23,3	7,7
11	5	11,5	-6,5
12	3	6,5	-3,5
13	18	19,8	-1,8
Total	182		
Estadísticos de contraste			
Chi-cuadrado		279,717	
Grados de libertad		12	
Significación asintótica		0,000	

Tabla 82

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores en cada Capítulo con el número de unidades de registro en ese Capítulo en el Libro 3.

Capítulo	N observado	N esperado	Residual
1	3	5,4	-2,4
2	17	17,7	-0,7
3	10	24,6	-14,6
4	14	13,1	0,9
5	30	9,3	20,7
6	3	14,4	-11,4
7	16	11,9	4,1
8	12	12,3	-0,3
9	1	3,4	-2,4
10	3	12,5	-9,5
11	38	22,4	15,6
Total	147		
Estadísticos de contraste			
Chi-cuadrado		86,469	
Grados de libertad		10	
Significación asintótica		0,000	

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

Tabla 83

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores en cada Capítulo con el número de unidades de registro en ese Capítulo en el Libro 4.

Capítulo	N observado	N esperado	Residual
1	3	8,8	-5,8
2	3	6,0	-3,0
3	4	11,1	-7,1
5	2	9,1	-7,1
6	31	9,4	21,6
7	12	7,4	4,6
8	8	5,4	2,6
9	21	7,1	13,9
12	13	32,7	-19,7
Total	97		

Estadísticos de contraste	
Chi-cuadrado	108,274
Grados de libertad	8
Significación asintótica	0,000

En todos los casos la significación asintótica fue 0, por lo que la hipótesis nula fue rechazada y concluimos que el número de errores de los capítulos no se ajustan al número de unidades de registro contenidas en esos capítulos. Aun así, en el Libro 3 una de las casillas obtuvo una frecuencia esperada menor que 5, por lo que los resultados no son concluyentes en ese caso.

8.3.4. Bondad de ajuste: Errores en cada Libro por unidad de análisis, filtrando por Bloque.

Habiendo rechazado la hipótesis de bondad de ajuste segmentando por Capítulo y por Bloque-Capítulo, decidimos tomar cada Bloque-Capítulo de forma independiente y, segmentando otra vez por Libro, realizar una nueva prueba de bondad de ajuste. En este caso, se trata de una prueba de bondad de ajuste del número de errores con el número de unidades de análisis, pero filtrando por los diferentes valores de la variable Bloque. El desglose de unidades de análisis por Bloque en cada libro se muestra en la Tabla 84.

Tabla 84

Unidades de análisis pertenecientes a cada Bloque contenidas en cada Libro.

Bloque	Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	Total
Aritmética	446	393	281	151	1271
Medida	288	281	203	128	900
Geometría	119	103	106	54	382
Análisis de datos	65	51	25	25	166
Álgebra	94	49	67	34	244
Total	1012	877	682	392	2963

La hipótesis nula de la prueba fue “El número de errores de cada Bloque de contenidos se ajusta, en cada Libro, al número de unidades de análisis de ese Bloque de contenidos contenido en ese Libro”.

Las pruebas de bondad de ajuste filtrando por cada valor de Bloque muestran que en Aritmética el valor de χ^2 es alto (14,254), por lo que la significación asintótica es muy baja (0,003) y por tanto se rechaza la hipótesis nula: existen diferencias entre unos libros y otros en el número de errores del Bloque Aritmética respecto al número de unidades de análisis de ese Bloque.

En el caso de Geometría, el Libro 4 tuvo una frecuencia esperada menor que 5. Por esa razón se repitió el análisis realizando una prueba exacta. El resultado fue que la significación asintótica alcanzó 0,216 ($\chi^2 = 4,444$). Junto con Geometría, Medida, Análisis de datos y Álgebra tuvieron valores de chi-cuadrado pequeños y significaciones asintóticas mayores que el valor crítico 0,05: $\chi^2_{\text{Medida}} = 5,858$, significación asintótica = 0,119 > p; $\chi^2_{\text{Análisis de datos}} = 7,009$, significación asintótica = 0,072 > p; $\chi^2_{\text{Álgebra}} = 2,295$, significación asintótica = 0,514. Por tanto en estos cuatro bloques, al no existir indicios para rechazar la hipótesis nula, se aceptó: en Medida, Geometría, Análisis de datos y Álgebra el número de errores en cada Libro se distribuye igual que las unidades de análisis.

Los resultados de las pruebas al filtrar por cada uno de los bloques figuran en las Tablas 85, 86, 87, 88 y 89.

Tabla 85

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis de Aritmética en cada Libro.

Aritmética				Estadísticos de contraste	Valor
Libro	N observado	N esperado	Residual		
Libro 1	59	46,7	12,3	Chi-cuadrado	14,254
Libro 2	23	41,1	-18,1		
Libro 3	38	29,4	8,6	Grados de libertad	3
Libro 4	12	15,8	-2,8	Significación asintótica	0,003
Total	133				

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

Tabla 86

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis de Medida en cada Libro.

Medida				Estadísticos de contraste	Valor
Libro	N observado	N esperado	Residual		
Libro 1	154	141,1	12,9	Chi-cuadrado	5,858
Libro 2	127	137,7	-10,7	Grados de libertad	3
Libro 3	86	99,5	-13,5	Significación asintótica	0,119
Libro 4	74	62,7	11,3		
Total	441				

Tabla 87

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis de Geometría en cada Libro.

Geometría				Estadísticos de contraste	Valor
Libro	N observado	N esperado	Residual		
Libro 1	13	8,7	4,3	Chi-cuadrado	4,444
Libro 2	4	7,5	-3,5	Grados de libertad	3
Libro 3	6	7,8	-1,8	Sig. asintótica	0,217
Libro 4	5	4,0	1,0	Sig. exacta	0,216
Total	28				

Tabla 88

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis de Análisis de datos en cada Libro.

Análisis de datos				Estadísticos de contraste	Valor
Libro	N observado	N esperado	Residual		
Libro 1	18	16,1	1,9	Chi-cuadrado	7,009
Libro 2	18	12,6	5,4	Grados de libertad	3
Libro 3	3	6,2	-3,2	Significación asintótica	0,072
Libro 4	2	6,2	-4,2		
Total	41				

Tabla 89

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis de Álgebra en cada Libro.

Álgebra				Estadísticos de contraste	Valor
Libro	N observado	N esperado	Residual		
Libro 1	15	16,2	-1,2	Chi-cuadrado	2,295
Libro 2	10	8,4	1,6	Grados de libertad	3
Libro 3	14	11,5	2,5	Significación asintótica	0,514
Libro 4	3	5,9	-2,9		
Total	42				

A pesar de haber realizado la prueba exacta para el bloque Geometría, en el que la frecuencia esperada del Libro 4 era menor que 5, repetimos el análisis eliminando ese Libro. El resultado de esta nueva prueba se encuentra en la Tabla 90.

Tabla 90

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis de Geometría en cada Libro, excluyendo el Libro 4.

Geometría				Estadísticos de contraste	Valor
Libro	N observado	N esperado	Residual		
Libro 1	13	8,3	4,7	Chi-cuadrado	4,311
Libro 2	4	7,2	-3,2	Grados de libertad	2
Libro 3	6	7,4	-1,4	Sig. asintótica	0,116
Total	28				

Como se puede ver, en este caso el valor de χ^2 fue de 4,311, lo cual implicaba una significación asintótica igual a $0,116 > p$, por lo que, al no haber indicios para rechazar la hipótesis nula, ésta se aceptó: en el bloque Geometría, el número de errores en los Libros 1, 2 y 3 se distribuye igual que las unidades de análisis.

El único bloque en el que no se acepta la hipótesis nula es Aritmética. Para comprobar si el problema es que alguno de los libros tiene una particularidad, repetimos el análisis eliminando los errores de uno de los libros cada vez. El resultado fue positivo cuando es el Libro 2 el que no se tiene en cuenta en la prueba, como se ve en la Tabla 91.

En estas condiciones sí podemos decir que, al no existir indicios para rechazar la hipótesis nula, ésta se aceptaría. El número de errores se ajusta al número de unidades de análisis en los Libros 1, 3 y 4 en todos los Bloques de contenidos, mientras que en todos los Libros se ajusta en los Bloques de Medida, Geometría, Análisis de datos y Álgebra.

Tabla 91

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis de Aritmética en cada Libro, excluyendo el Libro 2.

Aritmética				Estadísticos de contraste	Valor
Libro	N observado	N esperado	Residual		
Libro 1	59	55,9	3,1	Chi-cuadrado	2,248
Libro 3	38	35,2	2,8	Grados de libertad	2
Libro 4	13	18,9	-5,9	Significación asintótica	0,325
Total	110				

8.3.5. Bondad de ajuste: Errores en cada Libro por unidad de análisis, filtrando por Bloque-Capítulo

Tras los resultados de la prueba anterior, se antoja pertinente la realización del mismo análisis, pero filtrando por los valores de Bloque-Capítulo, en lugar de Bloque. La hipótesis nula fue “Para cada bloque de contenido al que se dedican los capítulos, el número de errores se ajusta al número de unidades de análisis de cada Libro”. El recuento de unidades de análisis en los capítulos dedicados a cada bloque se refleja en la Tabla 92.

Tabla 92

Número de unidades de registro que se encuentran en los capítulos dedicados a cada Bloque.

Bloque-Capítulo	Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	Total
Aritmética	331	301	200	96	928
Medida	403	130	259	103	895
Geometría	125	198	125	33	481
Análisis de datos	46	90	16	14	166
Álgebra	107	32	82	31	252
Total	1012	751	682	277	2722

Por su parte, los resultados de las cinco pruebas realizadas (una por cada bloque de contenidos a que se dedican los capítulos) se encuentran en las Tablas 93, 94, 95, 96 y 97.

Como se puede ver, los resultados muestran que la hipótesis nula es rechazada en los bloques de Medida y Geometría (valores de χ^2 iguales, respectivamente, a 25,430 y a 26,999, con significación asintótica igual a 0).

Por el contrario, con un valor de χ^2 igual a 2,087 y una significación asintótica igual a 0,555, en el caso de los capítulos dedicados a Álgebra no existen indicios para rechazar la hipótesis nula, por lo que se aceptaría.

Por su parte, la prueba realizada en el Bloque-Capítulo Aritmética devuelve una χ^2 de 8,918 y una significación asintótica de 0,030, por lo que con un nivel de confianza del 95% se rechazaría la hipótesis nula, mientras que con un nivel de confianza del 99% no habría indicios para rechazarla, y por tanto se aceptaría.

Por último, el caso de Análisis de datos es particular por dos motivos. El primero es que el Libro 4 no posee errores de Análisis de datos, por lo que el resultado de esta prueba no puede extrapolarse a este libro. El segundo es que nos encontramos con una frecuencia esperada menor que 5. Por esta razón se realizó un análisis exacto, que dio una significación exacta de 0,052. Por tanto, para los tres libros restantes no existen indicios para rechazar la hipótesis nula, luego se aceptaría: el número de errores y el número de unidades de análisis en los capítulos dedicados al Análisis de datos se distribuyen de la misma forma.

Tabla 93

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis en capítulos dedicados a Aritmética en cada Libro.

Aritmética				Estadísticos de contraste	Valor
Libro	N observado	N esperado	Residual		
Libro 1	43	34,6	8,4	Chi-cuadrado	8,918
Libro 2	21	31,5	-10,5	Grados de libertad	3
Libro 3	27	20,9	6,1	Significación asintótica	0,030
Libro 4	6	10,0	-4,0		
Total	97				

Tabla 94

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis en capítulos dedicados a Medida en cada Libro.

Medida				Estadísticos de contraste	Valor
Libro	N observado	N esperado	Residual		
Libro 1	168	187,3	-19,3	Chi-cuadrado	25,430
Libro 2	80	60,4	19,6	Grados de libertad	3
Libro 3	96	120,4	-24,4	Significación asintótica	0,000
Libro 4	72	47,9	24,1		
Total	416				

Tabla 95

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis en capítulos dedicados a Geometría en cada Libro.

Geometría				Estadísticos de contraste	Valor
Libro	N observado	N esperado	Residual		
Libro 1	20	21,4	-1,4	Chi-cuadrado	26,999
Libro 2	45	25,6	19,4	Grados de libertad	3
Libro 3	6	21,4	-15,4	Significación asintótica	0,000
Libro 4	3	5,6	-2,6		
Total	74				

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

Tabla 96

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis en capítulos dedicados a Análisis de datos en cada Libro.

Análisis de datos				Estadísticos de contraste	Valor
Libro	N observado	N esperado	Residual		
Libro 1	11	6,1	4,9	Chi-cuadrado	5,871
Libro 2	8	11,8	-3,8		
Libro 3	1	2,1	-1,1		
Libro 4	-	-	-		
Total	20			Grados de libertad	2
				Sig. asintótica	0,053
				Sig. exacta	0,052

Tabla 97

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis en capítulos dedicados a Álgebra en cada Libro.

Álgebra				Estadísticos de contraste	Valor
Libro	N observado	N esperado	Residual		
Libro 1	17	18,7	-1,7	Chi-cuadrado	2,087
Libro 2	7	5,6	1,4		
Libro 3	17	14,3	2,7	Grados de libertad	3
Libro 4	3	5,4	-2,4	Significación asintótica	0,555
Total	44				

Al haber percibido una fuerte diferencia en Aritmética en el Libro 2, decidimos volver a hacer el análisis, excluyéndolo de los cálculos. Los resultados se encuentran en la Tabla 98.

Como se puede ver, esta vez la significación asintótica es $0,197 > p$, por lo que, al no existir indicios para rechazar la hipótesis nula, se aceptaría y tendríamos que el número de errores en capítulos dedicados a Aritmética se ajusta al número de unidades de análisis en esos mismos capítulos en los Libros 1, 3 y 4.

Tabla 98

Prueba chi-cuadrado para comparar el número de errores y de unidades de análisis en capítulos de Aritmética en cada Libro, excluyendo el Libro 2.

Aritmética				Estadísticos de contraste	Valor
Libro	N observado	N esperado	Residual		
Libro 1	43	40,1	2,9	Chi-cuadrado	3,250
Libro 3	27	24,2	2,8		
Libro 4	6	11,6	-5,6	Grados de libertad	2
Total	76			Significación asintótica	0,197

8.3.6. Independencia: variables Contexto y Bloque-Capítulo

Nos interesamos ahora por la dependencia de variables, en particular de Bloque-Capítulo y Contexto. De este modo, comprobaríamos si las proporciones de Teoría y Problema de los errores dependen o no del bloque al que se dedica el capítulo que los contienen.

La hipótesis nula fue “Las variables Contexto y Bloque-Capítulo son independientes”, y los resultados se encuentran en la Tabla 99.

Tabla 99

Prueba chi-cuadrado de independencia de las variables Contexto y Bloque-Capítulo.

CONTEXTO		BLOQUE-CAPÍTULO					
		Aritmética	Medida	Geometría	Análisis de datos	Álgebra	Total
Teoría	Recuento	3	42	9	1	6	61
	Frecuencia esperada	9,1	39,0	6,9	1,9	4,1	61,0
Problema	Recuento	94	374	65	19	38	590
	Frecuencia esperada	87,9	377,0	67,1	18,1	39,9	590,0
Total	Recuento	97	416	74	20	44	651
Chi-cuadrado				6,831			
Significación asintótica				0,145			
Chi-cuadrado (Aritmética, Medida y Geometría)				5,509			
Significación asintótica (Aritmética, Medida y Geometría)				0,064			

Aunque nos encontramos con una significación asintótica $0,145 > p$, dos casillas de la tabla de frecuencias esperadas fue menor que 5, lo cual invalida el resultado. Es por ello que repetimos la prueba tras retirar los errores de Análisis de datos y Álgebra. En esta segunda ocasión el valor de chi-cuadrado fue $\chi^2 = 5,509$ y la significación asintótica $0,064 > p$. Al no haber indicios para rechazar la hipótesis nula, ésta fue aceptada y concluimos que las variables Contexto y Bloque-Capítulo son independientes en los bloques Aritmética, Medida y Geometría. Por falta de muestra no se puede extender esta afirmación a todos los valores de Bloque-Capítulo.

8.3.7. Independencia: variables Contexto y Bloque

Repitiendo el análisis anterior para la variable Bloque, en lugar de Bloque-Capítulo, podemos comprobar si las proporciones de Teoría y Problema se conservan en los distintos valores de la variable Bloque. La hipótesis nula fue: “Las variables Bloque y Contexto son independientes”.

Al igual que en el caso de Contexto y Bloque-Capítulo, existen varias frecuencias esperadas (Teoría en Geometría, Análisis de datos y Álgebra) que no llegan a 5. Es por esto que fueron eliminadas del análisis y, al repetir éste de nuevo, encontramos un valor de χ^2 de 0,666 y una significación asintótica de $0,414 > p$. Por ello, aunque solamente para los Bloques Aritmética y Medida (que por otra parte son los más numerosos), al no encontrar indicios para rechazar la hipótesis nula, ésta se aceptó: si consideramos solamente los errores de los Bloques Aritmética y Medida, las variables Bloque y Contexto son independientes. Los resultados del test se encuentran en la Tabla 100.

Tabla 100

Prueba chi-cuadrado de independencia de las variables Contexto y Bloque.

CONTEXTO		BLOQUE					Total
		Aritmética	Medida	Geometría	Análisis de datos	Álgebra	
Teoría	Recuento	8	36	13	1	7	65
	Frecuencia esperada	12,6	41,8	2,7	3,9	4,0	65,0
Problema	Recuento	125	405	15	40	35	620
	Frecuencia esperada	120,4	399,2	25,3	37,1	38,0	620,0
Total	Recuento	133	441	28	41	42	685
Chi-cuadrado				52,149			
Significación asintótica				0,000			
Chi-cuadrado (Aritmética y Medida)				0,666			
Significación asintótica (Aritmética y Medida)				0,414			

8.3.8. Otras pruebas realizadas.

En los apartados anteriores solamente se han mostrado los resultados más relevantes de entre todas las pruebas de homogeneidad de muestras, de bondad de ajuste y de independencia realizadas. Las demás pruebas se recogen en el Anexo 5.

9. Discusión

Como vimos anteriormente, nuestro objetivo principal consistió en la localización y la identificación de los errores matemáticos presentes en los libros de texto de Matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria recomendados por el Ministerio de Educación de Singapur para su uso durante el periodo 2009-2017.

De entre la multitud de enfoques que se pueden utilizar en la investigación cualitativa (López Noguero, 2002; Neergaard y Ulhøi, 2007; Rodríguez Gómez et al., 1996; Taylor y Bogdan, 1987), el que más claramente se adecúa a las características del presente trabajo es el análisis de contenido (Bardin, 2002; Berelson, 1952; Holsti, 1969; Krippendorff, 2004; Lalande, 2010; Piñuel Raigada, 2002), más concretamente cualitativo o de contenido expreso (Gómez Mendoza, 2000; López Noguero, 2002; Piñuel Raigada, 2002).

Antes de comenzar el análisis de contenido propiamente dicho, fue necesario llegar a una definición de error matemático que fuese funcional y permitiese identificarlo de forma inequívoca. Asimismo, se decidieron todas las variables y categorías en que se podría clasificar el error una vez identificado. Éstas fueron las variables de localización, contenido y error matemático y finalmente las de identificación.

A continuación, se seleccionó el corpus de documentos con el que comenzaría el trabajo de campo. La primera decisión fue la de elegir los libros de un país que destacase por sus resultados en rendimiento matemático, por lo que se investigó en las pruebas internacionales, especialmente PISA y TIMSS, qué países se situaban mejor en los resultados de sus alumnos. Estos resultados permitieron establecer una comparación objetiva entre países. Singapur fue elegido por encabezar mayoritariamente las listas como país. La etapa educativa escogida en la que centrar el estudio fue Educación Primaria porque ya en esta etapa los alumnos de Singapur demuestran unas capacidades que los hacen destacar por encima del resto del mundo. Se escogió, asimismo, el curso 6.º de Educación Primaria por ser el curso más avanzado de la etapa, en el que todos los conceptos que aparecen en ella se revisan y amplían, y que son clave para el paso a la siguiente etapa (Educación Secundaria). Por último, se escogió la modalidad Standard por ser la más completa en cuanto a contenidos.

En un principio, se intentó llevar a cabo un estudio empírico para determinar el grado de uso de los diferentes libros de texto existentes en los colegios públicos, pero la imposibilidad de realizar dicho estudio por la censura del Ministerio de Educación singapurense obligó a seleccionar los libros por otra vía. Se vio que el Ministerio de Educación recomendaba una serie de libros, y 52 de los 164 centros públicos del país, donde por ley estudian todos los alumnos singapurense, tenían publicados en sus páginas web los libros que utilizaban, y todos ellos estaban entre los recomendados por el Ministerio. Esto nos permitió hacer una estimación de los centros públicos que utilizaban libros recomendados por el Ministerio, siendo éstos, como mínimo, un 87,56% de los centros públicos. La revisión y aprobación previa de los documentos por medios oficiales garantiza la pertinencia y representatividad para este país de estos libros para ser analizados. Estos libros, por motivos de copyright, han sido nombrados en todo momento como Libro 1, Libro 2, Libro 3 y Libro 4.

Se encontraron un total de 685 errores entre los cuatro libros. Éstos están repartidos de forma sumamente irregular en prácticamente todos los aspectos estudiados, lo cual se pone de manifiesto en que ha habido muy pocas pruebas de bondad de ajuste que hayan obtenido resultados positivos.

9.1. Descripción de la distribución de los errores matemáticos

La presencia de errores en los libros de texto no es un caso aislado, como ya se vio en la parte teórica de este trabajo. Diversos autores han informado de la existencia de errores en libros de texto en distintas disciplinas, denominándolos como errores, desviaciones, falacias o equivocaciones . La mayor parte de las investigaciones se centran en aspectos concretos de la asignatura a la que pertenecen los libros de texto investigados (como la genética en Biología, las ciencias de la Tierra en Ciencias Naturales o las ilustraciones en libros de Matemáticas).

Las motivaciones que han suscitado las investigaciones sobre los errores presentes en los libros de texto tienen un denominador común: no es una situación deseable que el alumno entre en contacto con información falsa. Según los propios autores, esto puede provocar, en niveles inferiores (Educación Primaria o Educación Secundaria), confusión y una visión distorsionada sobre determinados conceptos en

los alumnos, puesto que los datos o la información que reciben no se corresponde con la realidad (Medina y Cudmani, 2016; Pérez Rodríguez, Álvarez Lires y Serrallé marzoa, 2009). Para otros autores, el mero conocimiento erróneo supone un problema para el correcto aprendizaje del alumno, especialmente en edades tempranas, por lo que es importante eliminar este efecto (Carrión Miranda, 2007; Noh y Jang, 2015).

Por otra parte, poner estos errores de manifiesto es una tarea necesaria para la mejora de los libros de texto, que puede lograrse mediante la revisión sistemática por parte de personal especializado de los mismos. Esta mejora repercutiría en la construcción de un mejor conocimiento por parte de los alumnos, así como en la ruptura del círculo vicioso que perpetúa ciertos errores: los profesores enseñan los errores contenidos en los libros, los alumnos los aprenden y, en algún momento del futuro, estos alumnos son los escritores de los nuevos libros de texto, en los que reproducen el error aprendido en el pasado, con lo que el ciclo vuelve a empezar (Jaime Pastor et al., 1992; Sen y Samanta, 2015; Uhlik, 2004).

Por último, ya en niveles superiores ciertos errores en libros de texto (especialmente de estadística) ponen en peligro la validez y calidad de las investigaciones científicas. Además, el carácter autoperpetuador de los errores del que acabamos de hablar hace difícil acabar con ellos, a menos que se ponga de manifiesto su existencia (Bland y Altman, 1988; Hubbard y Bayarri, 2003).

En nuestro trabajo, aunque las razones anteriores nos parecen suficientes para llevar a cabo una investigación exhaustiva sobre los errores matemáticos en los libros de texto, hemos considerado relevante hacerlo desde la idea de que los libros analizados se corresponden con un país que disfruta de una posición privilegiada en las pruebas internacionales, y por tanto es razonable el planteamiento de la posible relación entre los errores y el rendimiento académico de los alumnos.

La concentración de errores por libro en nuestro estudio fue, de media, 0,63 errores por página, siendo el menor valor el del Libro 4 con 0,40 errores por página y el mayor el del Libro 1, con 0,78 errores por página. King (2010) encontró 1 error de media en los capítulos dedicados a ciencias de la Tierra de los 51 libros que analizó, si bien el rango en este caso fue mucho más amplio: entre 0.1 errores por página y 2.5 errores por página. Los libros singapurenses son mucho más homogéneos en este aspecto, aunque el número medio de errores no es significativamente más bajo.

Se puede decir que el campo de las ciencias de la Tierra (y en concreto la geología) es un campo particularmente proclive a la inclusión de errores (Arthur, Stow y McCall, 1996). En los libros más utilizados de la Comunidad de Madrid, Fernández Palop (2013) encontró 0,89 errores por página, que es una cifra solamente algo mayor que la encontrada en los de Singapur, aunque su rango fue considerablemente mayor: los libros con mayor y menor concentración de errores tenían 1,31 y 0,47 errores por página, respectivamente.

En cuanto a los errores por unidad de análisis, el promedio fue de 0,23 errores, con un rango que osciló entre 0,21 y 0,26 errores. Es una cifra parecida a la obtenida a partir de los errores en las imágenes de los libros de texto de 2º grado coreanos, donde se encontraron 45 errores en 443 ilustraciones examinadas, lo que significa 0,10 errores por ilustración. Aunque Fernández Palop (2013) no ofrece información sobre la relación entre el número de errores y el número de unidades de análisis, sí lo hace sobre el número de errores y el número de páginas y de capítulos, afirmando además que el número de errores está relacionado tanto con el número de páginas como con el número de capítulos. Los resultados obtenidos en nuestro trabajo sugieren la posibilidad de que esta conclusión sea incompleta. La estructura flexible e irregular de los libros de Singapur, en los cuales tanto el número de páginas en cada capítulo como el número de unidades de análisis en cada página son muy irregulares impiden ver la relación entre unidades de análisis y errores a través de páginas y capítulos. En cambio, tanto el número de unidades de análisis por página como de páginas por capítulo es mucho más constante en los libros españoles, por lo que la relación entre ambos y el número de errores puede ser en realidad una manifestación de la relación, más basal, entre número de errores y número de unidades de análisis.

Por último, en cuanto al número de errores en los capítulos dedicados a cada bloque de contenidos, se encontró que éstos se concentraban fundamentalmente en los capítulos dedicados a Medida: 416 errores, un 60,73% del total. En los resultados de Fernández Palop también había un bloque que acumulaba un porcentaje muy parecido, pero en ese caso los errores se encontraban preferentemente en los capítulos de Aritmética. Una de las posibles razones para explicar esta discrepancia se encuentra en el hecho de que aproximadamente la mitad de los capítulos de los libros de texto de Singapur se dedican a la Medida, mientras que en los libros españoles la mayor parte de los capítulos (rondando el 60%) se dedican a la Aritmética. Aun así, el porcentaje de errores contenidos en los capítulos de un determinado bloque se ajusta bien al número de capítulos de ese bloque en el caso de los libros españoles,

mientras que en los de Singapur no: los capítulos de Medida contienen una cantidad de errores mayor de lo correspondiente a su peso dentro de los libros, mientras que los de Aritmética, que son los segundos tanto en número de capítulos como en número de errores, contienen una cantidad de errores mucho menor de lo que le correspondería por número de capítulos. Esta apreciación intuitiva se vio confirmada por los resultados de las pruebas de bondad de ajuste entre el número de errores en cada valor de Bloque-Capítulo y el número de capítulos dedicado a ese bloque de contenidos, que fueron negativas en el caso de los libros de Singapur.

En consecuencia, podemos afirmar objetivamente la existencia de errores en los libros de texto de Matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria de Singapur, en un número lo suficientemente alto como para que esté plenamente justificado su análisis. Es por ello que, ante la información expuesta en los párrafos anteriores, basada en la fundamentación teórica, en el conjunto de errores matemáticos situado en los anexos y en los resultados obtenidos a partir de ellos, aportamos datos que apuntan a la consecución de los objetivos primero y segundo de nuestra investigación.

9.2. Clasificación de los errores matemáticos

Para dar cumplimiento al segundo objetivo de investigación, los errores identificados fueron clasificados de acuerdo a varios criterios: el propósito del contenido en que se encontró el error, ya fuese un contenido teórico o un problema; el bloque de contenidos al que pertenecía el error, y por último el tipo de error de que se trataba.

Cuando se contaron los errores por bloque de contenido al que pertenecían, encontramos que se repartían de una forma muy desigual, siendo la mayoría de ellos parte del Bloque Medida. Es interesante hacer notar que, a pesar de ser el bloque más numeroso, no es en absoluto en el que los investigadores ponen su atención de forma prioritaria, puesto que en investigaciones sobre errores matemáticos la atención se centra mucho más frecuentemente en la geometría (como en Jaime Pastor et al., 1992), la aritmética (como en Chang et al., 2014) y, sobre todo, la estadística (por ejemplo, Hubbard y Bayarri, 2003).

No existe una clasificación universal de tipos de error en los libros de texto. En este trabajo se utilizó el sistema de categorías de Fernández Palop (2013), formado por las categorías Concepto, Omisión, Indefinición y Símbolo. Otros autores que han buscado errores en libros de texto los han clasificado mediante sistemas de categorías ad hoc que se adaptasen a la muestra con la que trabajaron. Algunos ejemplos son los siguientes:

- En el contexto de las ciencias de la Tierra en educación especial (Jeon et al., 2010), se distingue entre falacias y explicaciones faltas de claridad (“unclear explanations”). Salvando las diferencias entre la matemática y las ciencias de la Tierra, se aprecia un paralelismo entre las falacias y los errores de concepto y las explicaciones faltas de claridad y los errores de Tipo Indefinición.
- En un estudio sobre la enseñanza de la genética en libros de texto de Educación Secundaria de Brasil y de Estados Unidos (Franzolin y Bizzo, 2015), se encontraron una serie “desviaciones” respecto de la literatura de referencia, las cuales fueron clasificadas en seis categorías: término equivalente, metáfora, desviación conceptual, desviación en la descripción de un proceso, generalización de ocurrencia y contenido desactualizado. Estas categorías, aunque han sido diseñadas para ser aplicadas en el campo de la biología, poseen ciertas similitudes con algunas de las categorías de error utilizadas en nuestro estudio. Por ejemplo, la generalización de ocurrencia es una generalización (falsa) a partir de un suceso particular. Esta categoría, en términos matemáticos, se asemeja fuertemente al Tipo Omisión, en el sentido de que se solventaría al incluir cierta información, cuya ausencia es la fuente del error. Del mismo modo, las desviaciones conceptuales se asemejan (aunque no son equivalentes) a algunos errores de Tipo Concepto.
- Tratando las definiciones de los triángulos y cuadriláteros, Jaime Pastor et al. (1992) definen tres categorías:
 - Los errores ocasionados por la presentación visual, que consideran errores no matemáticos, pero sí didácticos.
 - Errores por definiciones diferentes, en los que las definiciones van cambiando a lo largo de los cursos en una misma serie de libros.
 - Errores por interpretación incorrecta de la definición, en los que se determinan propiedades que no se extraen lógicamente de las definiciones.

Por la descripción de estos errores, todos ellos habrían sido considerados errores de Concepto (aunque en Características diferentes) en el marco del presente trabajo.

El tipo de error más común, con un tercio de los errores totales (exactamente un 34,89%), fue Símbolo, que curiosamente fue el tipo de error menos frecuente en el estudio de Fernández Palop. Podemos achacar este hecho a la precisión y rigor con que los ejercicios de Singapur suelen estar redactados, lo cual induce a una menor frecuencia de los errores de Indefinición, que en los libros españoles fue la categoría mayoritaria.

Al clasificar los errores por bloque de contenido, se observó que la mayoría de ellos (un 64,4%) se encontraban en ejercicios o contenidos teóricos dedicados a la Medida, y que este resultado era muy consistente cuando se comparaban los libros entre sí. El resultado se relaciona claramente con el hecho de que el tipo de error más común fue Símbolo, el cual se manifiesta con más frecuencia en los ejercicios de Medida. Nuevamente, Fernández Palop obtuvo un resultado diferente, pues la mayor parte de sus errores pertenecían al bloque Aritmética. Es interesante notar que en ambos casos, en los libros españoles y en los singapurenses, los errores de Símbolo se componían mayoritariamente de los errores con unidades de los contenidos de Medida. Y sin embargo, como vimos ya, los errores de Símbolo fueron minoría en los libros españoles. El menor número de contenidos y el rigor con que se utilizan las definiciones y se redactan los enunciados, nuevamente, pueden explicar las fuertes diferencias entre ambos resultados.

Al clasificar los errores por propósito cabe destacar que, aunque el número de errores de teoría es mucho menor que el de ejercicios en todos los libros, la proporción entre ambos es significativamente distinta (el porcentaje de errores de teoría varía entre el 3,1% y el 21,8%). Este resultado difiere del obtenido por Fernández Palop (2013) en los libros más utilizados de la Comunidad de Madrid, donde el porcentaje de errores de teoría oscila entre el 26% y el 36,1% del total. Además de ser más estables en este aspecto, los libros de la Comunidad de Madrid contienen muchos más errores de teoría que los de Singapur, aunque esto es probablemente consecuencia del hecho de que contienen en proporción muchos más contenidos teóricos que los libros de Singapur.

A partir de lo expuesto en este segundo apartado, y basándonos tanto en la fundamentación teórica, como en los resultados obtenidos a partir del análisis realizado sobre los errores encontrados, podemos afirmar que aportamos información suficiente para apoyar la consecución del tercer objetivo de nuestro trabajo.

9.3. Análisis de las relaciones entre las clases de errores matemáticos

El tercer objetivo del estudio se centró en la identificación de las relaciones entre los errores. Estas relaciones fueron medidas mediante la realización de pruebas de independencia, de homogeneidad de muestra y de bondad de ajuste.

9.3.1 Pruebas de independencia

De entre las pruebas de independencia que han tenido algún tipo de resultado estadísticamente significativo destacan las de Contexto con Bloque-Capítulo y Contexto con Bloque. Ambas deben ser fuertemente matizadas pues, por no existir suficiente muestra, aparecieron algunas frecuencias esperadas menores que 5.

En el cruce de Contexto con Bloque-Capítulo se aceptó la hipótesis de independencia, al menos en los bloques de Aritmética, Medida y Geometría. Esto significa que las frecuencias de errores en Teoría y Problema no dependen de si el error se encuentra en un capítulo dedicado a la Aritmética, a la Medida o a la Geometría. Recordemos que, aunque no se puede extrapolar a todos los capítulos, los errores contenidos en los capítulos dedicados a Análisis de datos y Álgebra representan tan solo el 10% del total de errores encontrados. Este resultado fue similar al obtenido por Fernández Palop (2013).

En el otro caso, la prueba de independencia de Contexto y Bloque, es más restringida todavía, puesto que hubo frecuencias menores que 5 en Geometría, Análisis de datos y Álgebra, por lo que solamente se pudo realizar un análisis concluyente de los bloques de contenido de Aritmética y Medida. Solamente estos dos Bloques contienen casi el 84% de la muestra. En el trabajo de Fernández Palop se encuentra un resultado muy similar, aunque su análisis no requirió la exclusión de casos por falta de muestra.

Es muy difícil dar una explicación al hecho de que exista esta independencia entre variables, puesto que distintos conceptos deberían llevar consigo distintas dificultades y formas de presentar los contenidos teóricos, por lo que no parece tener sentido que la probabilidad de generar errores sea la misma en unos casos y en otros. El resultado podría deberse, y esto no es más que una conjetura, al rigor con el que los libros se ciñen al currículo. Éste dicta de forma muy rígida los conceptos que se deben enseñar y, curiosamente, a menudo también qué conceptos no deben incluirse. El currículo marca, pues, los límites mínimos y también los máximos. Además, existen manifiestos parecidos entre los libros de texto en la presentación de determinados contenidos, como la deducción del área del círculo. Todas estas regularidades y restricciones podrían traer consigo un valor constante en la proporción de errores de teoría y ejercicios, lo cual hemos comprobado, a partir de nuestros datos, en los capítulos dedicados a Aritmética, Medida y Geometría y entre todos los errores pertenecientes a los bloques de Aritmética y Medida. Pero no se puede ignorar el hecho de que en los libros españoles esta independencia entre Contexto y Bloque y Bloque-Capítulo también existe, incluso con más fuerza.

Sin embargo, la proposición anterior se ve además matizada por el resultado obtenido de que el número de errores de cada Contexto (teoría/problema), ponderado por el número de unidades de análisis de cada Contexto, es muy cercano al 50%. Es decir, la probabilidad de que un error sea de Teoría o de Problema no cambia cuando se cambia el Bloque del error o su Bloque-Capítulo. Pero no solo eso, sino que además la probabilidad de que un contenido teórico contenga un error es aproximadamente la misma que la que tiene un problema. No ha sido posible realizar la prueba de independencia tomando por capas los libros o alguna otra variable, puesto que las frecuencias caían rápidamente por debajo de 5 y los resultados dejaban de ser válidos. Por ello, tampoco podemos hacer más que lanzar conjeturas. Posiblemente el mundo de los contenidos teóricos y el de los ejercicios no sean mundos tan independientes, y existan ciertas premisas compartidas que trascienden a la propia unidad de análisis y que son las que provocan el error. Nuevamente podríamos preguntarnos si no serán las restricciones y órdenes precisas bajo las que se encuentran los autores de los libros las causantes de esta regularidad.

9.3.2. Pruebas de bondad de ajuste entre errores y unidades de análisis

El Libro 1 es el que acumula la mayor cantidad de errores, 259, frente al Libro 4 que es el que menos: 97 errores. Esta disparidad en la acumulación de errores sigue siendo cierta, aun considerando el número de errores por página (0,78 errores por página en el Libro 1 frente a 0,40 errores por página en el Libro 4). Es por esto que las pruebas de bondad de ajuste del número de errores, filtrando por intervalos de páginas, dieron resultados negativos.

Si consideramos el número de errores con respecto al de unidades de análisis, los resultados merecen una reflexión.

Tomando como unidad de segmentación la variable Libro, con un nivel de confianza del 99% se consideraría que hay una relación entre el número de errores y el número de unidades de análisis en cada libro. Al tratar de profundizar más y ver si esta situación se mantiene también al segmentar por capítulos, la significación estadística cae a un valor nulo, por lo que se concluye que existen diferencias entre el número de errores y el número de unidades de análisis en cada capítulo. Es razonable que la distribución de errores por capítulos no respete el número de unidades de análisis; de hecho, los errores se acumulan en los capítulos dedicados a determinados bloques de contenido (especialmente Medida), lo que hace que estos capítulos tengan muchos más errores que otros capítulos (por ejemplo, Geometría).

Sin embargo, al filtrar por Bloque de contenido obtenemos unas significaciones estadísticas altas en todos los Libros para Medida (0,119), Geometría (0,216), Análisis de datos (0,072) y Álgebra (0,514), y también en Aritmética (0,325), pero esta última solamente para los Libros 1, 3 y 4. ¿Qué tiene de particular el Libro 2, que no se comporta como el resto de los Libros? Haciendo una revisión de los errores de Aritmética, encontramos que en el Libro 2 existe una falta de tendencia a contener ejercicios resueltos de este bloque de contenido que o bien involucren unidades, o bien sean cuidadosos al manejarlas. Al fin y al cabo, el error más frecuente del Bloque Aritmética es el de mal uso de símbolos en ejercicios resueltos o semirresueltos (por ejemplo, cuando se dice $4 \times 2 = 8$ metros, lo cual es incorrecto porque el producto de los números naturales 4 y 2, que no tienen unidad alguna, no es igual a 8 metros sino al número natural 8). Y en el Libro 2 existen menos ejercicios resueltos, y muchos

de los que tiene utilizan el dinero como unidad y ésta se maneja rigurosamente. Sin embargo, con esta salvedad, existe una fuerte relación entre el número de unidades de análisis de un Bloque y el número de errores que hay entre ellas.

¿Y por qué, si existe esta relación, no es alta la significación asintótica al realizar el test de bondad de ajuste entre el número de errores y el número de unidades de análisis al segmentar por Libro, sin filtrar por ninguna otra variable? La respuesta es clara, y es que la frecuencia de generación de errores es muy diferente entre unos valores de la variable Bloque y otros. De hecho, en promedio ésta varía entre los siete errores por cada 100 unidades de análisis de Geometría y los 49 errores por cada 100 unidades de análisis de Medida.

Al hacer una prueba más para comprobar si existe relación entre los errores y las unidades de análisis en cada Libro, pero filtrando en esta ocasión por Bloque-Capítulo, tenemos resultados diferentes. Solamente tenemos significación asintótica alta en Álgebra (0,555). En el bloque de Análisis de datos llega a 0,052, pero es un resultado tras hacer la prueba exacta, puesto que el Libro 3 tiene una frecuencia esperada menor que 5. Geometría y Medida tienen ambas una significación asintótica 0. En Aritmética, por último, la significación asintótica alcanza 0,030, lo que da motivos para rechazar la hipótesis nula a un nivel de confianza del 95%. Pero al realizar de nuevo el análisis excluyendo el Libro 2, que en el caso de Bloque vimos que se comportaba de forma distinta, se obtuvo 0,197, por lo que sí se aceptaría la hipótesis nula al no haber indicios para rechazarla. La razón de estas diferencias según el Bloque al que se dedica el capítulo hay que buscarlas bloque a bloque.

- Filtrar por Bloque-Capítulo Álgebra produce un resultado similar al de filtrar por Bloque Álgebra, lo cual tiene su explicación en el hecho de que los capítulos dedicados a Álgebra se encuentran entre los más puros de todos, entendiendo por “pureza” el grado de presencia de unidades de análisis correspondientes al bloque de contenidos al que se dedica el capítulo. El Libro en el que menor pureza se alcanza es en el Libro 1, donde la mayor parte de las unidades de análisis “intrusas” (esto es, correspondientes a un Bloque distinto a Álgebra) son de Aritmética, la cual tiene una proporción de errores por unidad de análisis similar a la de Álgebra. Por esta razón es previsible que los resultados de filtrar por Bloque-Capítulo sean similares a los de filtrar por Bloque en el caso de Álgebra.

- El caso de Aritmética también es similar en ambas situaciones (filtro por Bloque y por Bloque-Capítulo). La razón nuevamente se puede encontrar en los elevados índices de pureza de los capítulos dedicados a la Aritmética. Sin embargo, estos resultados no son tan parecidos entre sí como en el caso de Álgebra, tanto por la mayor presencia de errores de otros Bloques en los capítulos de Aritmética, como por la cantidad de unidades de análisis (y por ende, de errores) de Aritmética en capítulos dedicados a otras áreas.
- En Medida la explicación no es tan simple, puesto que, al filtrar por Bloque, encontramos una significación asintótica de 0,119 y al filtrar por Bloque-Capítulo la significación asintótica cae a 0. ¿Qué hace distinto a Medida en un caso y en otro? Hemos de tener en cuenta que en los Libros 2 y 4 la pureza de los capítulos dedicados a Medida es muy alta y, a su vez, tienen proporciones de errores por unidad de análisis muy similares entre sí (0,64 en el Libro 2 y 0,65 en el Libro 4), pero esta proporción es bastante mayor que la que tienen ambos libros, de promedio, entre todos los elementos de Medida (0,45 errores por unidad de análisis en el Libro 2 y 0,58 errores por unidad de análisis en el Libro 4). Esto ya de por sí significa que las unidades de análisis de Medida tienen mayor tendencia a ser erróneas en los capítulos dedicados a Medida que en el resto. Por su parte, los Libros 1 y 3 tienen menor pureza en estos capítulos, pues no supera el 65% en el Libro 1 y llega a caer al 54% en el Libro 3. Por lo tanto, aunque el número de errores por unidad de análisis en el Bloque Medida alcanza un valor muy alto en estos libros, en los capítulos dedicados a Medida esta proporción se ve atenuada por la presencia de otras unidades de análisis intrusas, menos propensas a generar errores. En definitiva, si la proporción de errores por unidad de análisis en los capítulos dedicados a medida es alta en dos de los libros y baja en los otros dos, se puede explicar que los resultados de las pruebas de bondad de ajuste al filtrar por Bloque Medida y por Bloque-Capítulo Medida sean diferentes.
- Las pruebas de bondad de ajuste de Geometría han sido muy diferentes al filtrar por Bloque y por Bloque-Capítulo (se aceptó la hipótesis de ajuste en el primer caso pero se rechazó en el segundo), pero no debemos pasar por alto que en ambos casos se han obtenido frecuencias menores que 5 y, por tanto, los resultados pueden no ser concluyentes. Además, debemos tener en cuenta que los capítulos de Geometría tienen purezas muy bajas en los Libros 1 y 2, y bastante moderadas en el Libro 3 (entre 0,7 y 0,74),

lo que trae consigo cambios importantes en las frecuencias de error por unidad de análisis.

- Por último, para estudiar los resultados de las pruebas de bondad de ajuste de la proporción de errores por unidad de análisis al filtrar por Análisis de datos como Bloque y como Bloque-Capítulo, debemos pensar en primer lugar que el 95% de estos errores caen en los Libros 1 y 2, que a su vez son los que menor pureza tienen en este Bloque (el Libro 3 solamente tiene 1 error en su capítulo de Análisis de datos y el Libro 4 no tiene ninguno). Sin embargo, la frecuencia de errores en Análisis de datos es, en general, intermedia en estos libros y, curiosamente, los ejercicios “intrusos” equilibran la situación, dejando la proporción de errores por unidad de análisis con pocos cambios. Podríamos decir, en este caso, que es el azar el causante de que las pruebas sean parecidas.

La comparación con los resultados obtenidos por Fernández Palop (2013) es inevitable, pues en su caso sí hubo una correlación entre el número de páginas y el número de errores. ¿Por qué en el caso de Singapur no? Lo que sucede con los libros más utilizados en la Comunidad de Madrid es que poseen una maquetación que sigue ciertas regularidades: en la mitad superior nos encontramos con las unidades de teoría, en la mitad inferior una serie de ejercicios y en los laterales o bien datos de interés o recordatorios. Este patrón hace que el número de unidades de análisis sea bastante uniforme por páginas, y por tanto, podríamos estar ante la situación de que no es que haya una relación entre el número de páginas y el número de errores, sino que el filtro por páginas no bloquearía la verdadera relación subyacente entre el número de errores y el número de unidades de análisis. En los libros de Singapur, en cambio, la maquetación no sigue patrones estandarizados, por lo que aunque el número de errores está correlacionado con el número de unidades de análisis, la distribución de éstas a lo largo de las páginas no es en absoluto regular, y por tanto, no existe correlación significativa entre el número de errores y el número de páginas.

Los libros de Singapur, por su parte, no se comportan así, como veremos en mayor profundidad en el capítulo dedicado a la prospectiva. No solamente carecen, en general, de una estructura rígida página a página, sino que además el número de unidades de análisis por página es muy variable. Típicamente, oscila entre 1 y 10, y además no es nada extraño que haya una sola unidad de análisis en la página, por ejemplo en el caso de un ejercicio resuelto o semiresuelto. Por lo tanto, en los libros de Singapur la segmentación por páginas enmascara la relación que existe entre errores y unidades de análisis, al variar fuertemente el número de éstas últimas de una página a otra.

Pero también conviene prestar atención no tanto a los resultados de las pruebas positivas, sino también a las pruebas negativas. Debe tenerse en cuenta que las pruebas realizadas sobre los libros de Singapur que determinan independencia de variables son muy escasas y además no son completamente concluyentes, o bien porque alguno de los libros se separa de los demás o bien por falta de un tamaño muestral suficientemente grande como para que los resultados se puedan considerar válidos. Esta situación no fue la encontrada en los libros más utilizados de la Comunidad de Madrid, donde la muestra fue suficiente y los libros se comportaban más homogéneamente. ¿Qué nos dice esto? En primer lugar, cabría preguntarse qué es más común, la dependencia o la independencia de las variables. A falta de más estudios realizados al nivel de profundidad de este trabajo solamente se puede especular, pero lo que sí indica la existencia de muchas relaciones entre las variables es el hecho de que los libros de la Comunidad de Madrid analizados se parecen a niveles que no se pueden percibir a simple vista, dando una apariencia subyacente de producción en cadena, compartiendo una misma filosofía en su desarrollo. Posiblemente los intereses comerciales de los que hablábamos en la parte teórica de este estudio estén detrás de esta homogeneidad, pues las editoriales trabajan para producir libros que se ajusten a lo que los profesores esperan. Si todas las editoriales trabajan con la misma premisa y con los mismos estudios sociológicos realizados sobre profesores, es razonable que todos sus productos tengan muchísimos elementos en común, tanto en la superficie como en el fondo. En cambio, los libros de Singapur son únicos, con características propias, no han sido producidos en serie. Y este hecho adquiere mucha más notoriedad si advertimos que tres de los libros pertenecen a la misma editorial, lo que significa que ésta ha puesto empeño en que sus productos se distingan unos de otros, en lugar de pretender saturar el mercado con libros que cubren las mismas expectativas, como aparentemente sucede en España.

A través de los resultados obtenidos en el presente trabajo, se percibe un cuidado mayor en los libros de Singapur que en los de la Comunidad de Madrid.

Como hemos visto, en la investigación llevada a cabo por Fernández Palop (2013) se hallaron una serie de relaciones entre las clases encontradas que, sin embargo, en Singapur no se dan. Si el origen de esta investigación era ver cómo en los países que obtenían buenos resultados en las pruebas internacionales el número de errores encontrados era mínimo, los resultados no han demostrado eso: tienen errores, y tienen muchos, sin embargo, los errores que se cometen son distintos a los que se cometen en España.

Mientras que los errores de Concepto encontrados en los libros de Singapur son matices, aparte de ser escasos en número, muchos errores de Concepto que podemos encontrar en los libros de España serían considerados errores muy graves por cualquier matemático.

Ejemplo 1 (España):

“De los alumnos que viajan en un autobús escolar, $\frac{2}{5}$ son niños y $\frac{4}{7}$ niñas. ¿Cuántos niños y niñas viajan en total?”

Para resolver el problema sumamos $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{7}$. Como las fracciones tienen distinto denominador, antes de operar las reducimos a común denominador por el método de los productos cruzados o por el del mínimo común múltiplo. Para resolver el problema vamos a utilizar el método de los productos cruzados.

$$\frac{2}{5} \text{ y } \frac{4}{7} \rightarrow \frac{2 \times 7}{5 \times 7} \text{ y } \frac{4 \times 5}{7 \times 5} \rightarrow \frac{14}{35} \text{ y } \frac{20}{35}$$

Ahora sumamos las nuevas fracciones.

$$\frac{14}{35} + \frac{20}{35} = \frac{34}{35}$$

Luego en total viajan en el autobús escolar $\frac{34}{35}$ niños y niñas.”

Este enunciado es erróneo a muchos niveles, pues la respuesta es absurda, la pregunta es imposible de responder con los datos proporcionados y además el planteamiento no tiene sentido: si el total de alumnos está compuesto por $\frac{34}{35}$ niños y niñas, ¿qué es el $\frac{1}{35}$ restante?

Ejemplo 2 (España):

“Dos divisiones son equivalentes si tienen el mismo cociente”

Este segundo enunciado ejemplifica perfectamente el error de concepto, pues estamos ante algo que es matemáticamente falso. Bajo esa definición, $1 \div 3$ y $1 \div 4$ son equivalentes, pues su cociente es el mismo: 0.

Ejemplo 3 (España):

“En un párrafo se han contado las vocales y se han obtenido los siguientes datos. Vocal a: 45. Vocal e: 11. Vocal i: 15. Vocal o:24. Vocal u: 8. ¿Qué letra representa la mediana?”

Estamos ante otro ejemplo que supone un grave error de concepto, pues la mediana solamente cabe calcularse cuando la variable es cuantitativa u ordinal, lo cual no es el caso de las vocales.

En cuanto a los errores de Singapur, veamos el siguiente ejemplo (la traducción es nuestra):

“El señor Chen conduce desde la Ciudad A a la Ciudad B. En una hora viajó 65 km. El señor Gopal también conduce en la misma dirección. En una hora viajó 95 km.

- *El señor Chen conduce a una velocidad de 65 km/h.*
- *El señor Gopal conduce a una velocidad de 95 km/h.*
- *La velocidad nos dice cuán rápido los señores Chen y Gopal están viajando.”*

En este caso, el error de concepto se debe a que saber cuántos kilómetros han viajado en una hora no informa sobre su velocidad (es decir, su velocidad instantánea), sino tan solo de su velocidad media. Claramente se puede ver que, si bien es un error, no está al mismo nivel que los ejemplos anteriores.

Si bien los errores de indefinición suponen la mayor parte de los errores contenidos en los libros españoles analizados, en Singapur son una minoría. Esto pone de manifiesto el cuidado que se pone en la redacción de los ejercicios, que es mucho más precisa en los libros de Singapur que en los de la Comunidad de Madrid. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1 (España):

“Un entrenador reparte 3l. De agua entre los 12 jugadores del equipo. ¿Qué cantidad de agua bebe cada jugador?”

Ejemplo 2 (España):

“Pedro tiene entre treinta y cuarenta fotografías de sus amigos. Cuando añada la suya podrá formar un cuadrado con ellas en su habitación. ¿Cuántas fotografías tiene?”

En ambos ejercicios el enunciado no explicita las condiciones que debe cumplir la solución, quedando pues en una indefinición. En el primero no se indica si todos los

jugadores beben lo mismo, ni si sobra o no agua. En el segundo, no se indica la forma de las fotografías, ni si la forma de cuadrado implica solamente la forma o incluye el relleno, o si se pueden superponer o no...

Ejemplo 3 (España):

“Isabel compró 3 alfombras iguales para el pasillo de su casa. ¿Cuánto mide la superficie que ocupan?” (ver Figura 93)

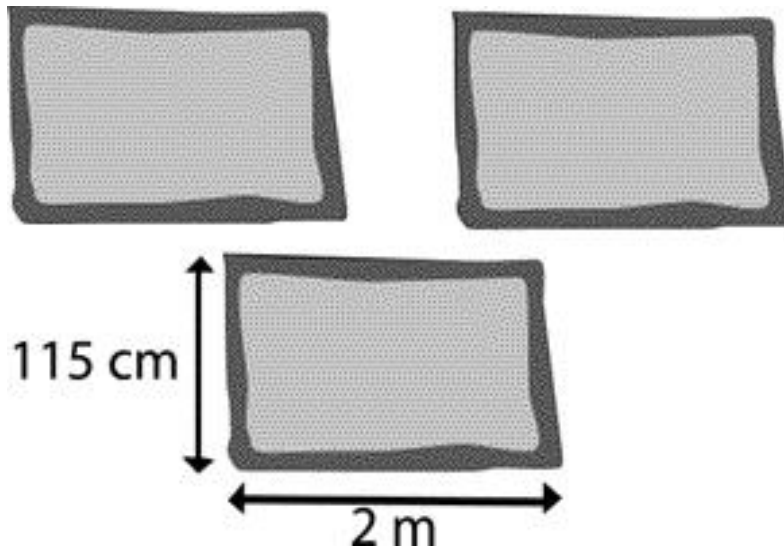


Figura 93: El problema de las alfombras.

Fuente: Elaboración propia.

En este último ejemplo encontramos tres objetos irregulares, para los que se pide el cálculo del área como si fuesen rectángulos. Se trata de una representación descuidada que induce al error.

Por contra, en Singapur encontramos ejemplos de indefinición como los siguientes:

Ejemplo 1 (Singapur, traducción nuestra):

“En una panadería se vendieron en total 1500 pasteles una determinada semana. El diagrama de sectores siguiente muestra las ventas diarias de cupcakes de esa semana [Diagrama de sectores con los distintos datos].

- a) *¿Cuántos cupcakes se vendieron el lunes?*
- b) *¿Qué porcentaje de los cupcakes se vendieron el viernes?”*

El error en este caso no es más que un matiz, pues en la pregunta b) no se aclara a qué total se refiere. Aunque se puede sobreentender que se refiere a los vendidos en toda la semana, no aparece explícito.

Ejemplo 2 (Singapur, traducción nuestra):

“Una cinta se corta en tres piezas con razones 1 : 3 : 4. La longitud del trozo más corto es 3 m. ¿Cuál era la longitud original de la cinta?”

Ahora la indefinición se debe a que no se indica la dirección en la que los tres trozos se cortan (podría ser transversal, longitudinal, oblicua o incluso irregular), ni figura explícitamente la magnitud de las razones de los trozos, por tanto el enunciado adolece de indefinición.

Los errores de Símbolo suponen el grupo más numeroso de errores en los libros de Singapur, lo cual se debe casi en exclusiva a los ejercicios resueltos y semirresueltos del bloque Medida. En España, sin embargo, no abundan los ejercicios resueltos y no existen los semirresueltos, pero por contra nos encontramos con gravísimos usos inadecuados de los símbolos matemáticos. Este grupo, además, fue el menos numeroso de entre los libros analizados.

Ejemplo 1 (España):

*“Para aumentar el 1% a una cantidad añadimos a la misma su centésima parte:
 $450+1\%=450+450\times 0,01=450+4,50=454,5$ ”*

En el ejemplo anterior estamos ante un uso incorrecto del símbolo %, que no se puede simplemente sumar a un número.

Ejemplo 2 (España):

“¿Cuál es el volumen del contenedor expresado en litros?” (ver Figura 94)

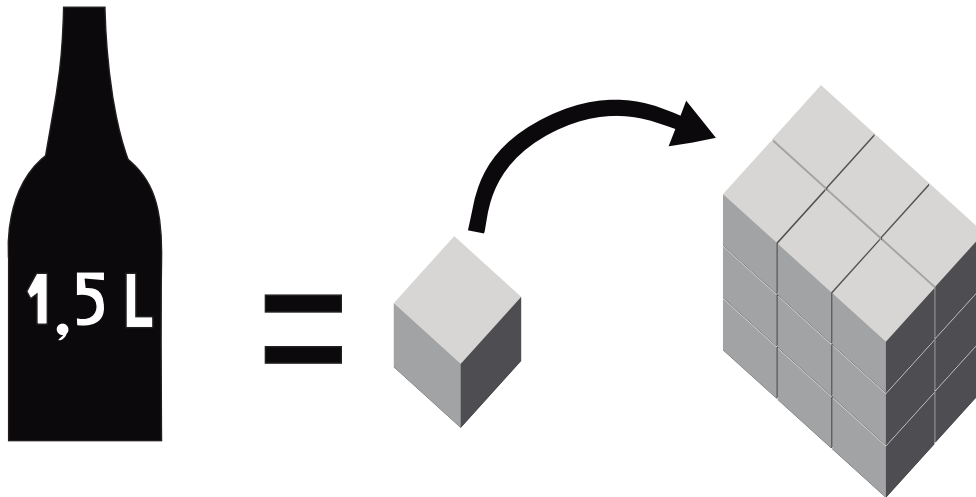


Figura 94: El problema del contenedor.

Fuente: Elaboración propia.

Ejemplo 3 (España):

“Julián está coleccionando un álbum de pegatinas de fútbol. Por la mañana ha pegado $\frac{3}{12}$ del total de pegatinas y por la tarde $\frac{5}{12}$. ¿Qué fracción de pegatinas ha pegado en total? Para resolver el problema, sumamos $\frac{3}{12}$ y $\frac{5}{12}$. $\frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{8}{12}$. Luego en total ha pegado $\frac{8}{12}$ pegatinas.” (ver Figura 95)

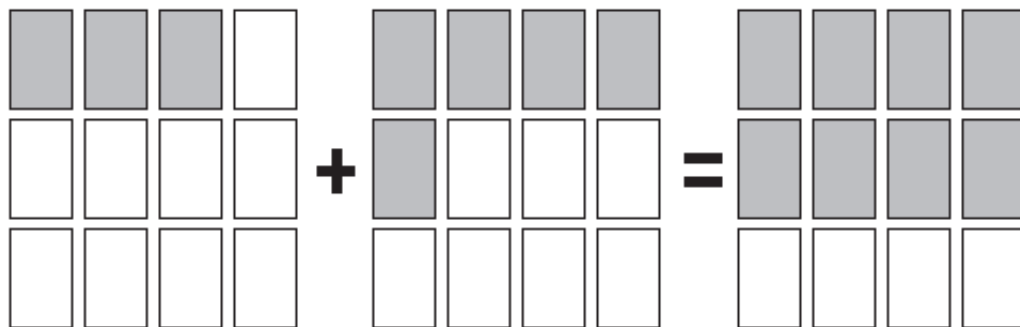


Figura 95: El problema de los cromos.

Fuente: Elaboración propia.

En los dos últimos ejemplos se muestran abusos de los signos matemáticos = y +, los cuales son aplicados a símbolos que nada tienen que ver con las matemáticas, por lo que dan lugar a expresiones sin sentido matemático.

Por su parte, la inmensa mayoría de errores de Singapur son similares al siguiente (la traducción es nuestra):

$$\begin{aligned} \text{“Distancia recorrida} &= \text{Velocidad} \times \text{Tiempo invertido} \\ &= 20 \times 15 \\ &= 300 \text{ m} \end{aligned}$$

La distancia recorrida en 15 minutos fue 300 m.”

El problema se encuentra en que el producto de dos números naturales como son 20 y 15 no son iguales a 300 metros, por lo que el símbolo igual está siendo impropriamente utilizado. No obstante, la identificación de este error implica una lectura muy rigurosa de la sintaxis matemática, muy lejos de los ejemplos encontrados en los libros españoles.

Por último, los errores de omisión suponen un pequeño porcentaje del total de errores en los libros españoles, mientras que es el segundo más numeroso en los de Singapur. Esto se debe fundamentalmente a un modelo de ejercicios que trabajan muy intensamente: la capacidad de contenedores con forma de ortoedro. En cambio, en los libros españoles encontramos omisiones muy importantes en fragmentos teóricos.

Ejemplo 1 (España):

“Probabilidad de un suceso. Determinamos la probabilidad mediante una fracción. Para expresar la probabilidad de un suceso, escribimos una fracción: en el numerador ponemos el número de casos favorables, y en el denominador, el número de casos posibles”.

Lo descrito es cierto únicamente para sucesos equiprobables, no para sucesos en general.

Ejemplo 2 (España):

“Si se multiplica el dividendo y el divisor por un mismo número, se obtiene el mismo cociente.”

Nada se dice acerca de lo que sucede con los restos, y lo que sucede es que el resto queda multiplicado por el mismo número. Se trata de una información muy relevante que no puede omitirse.

En Singapur, los errores de omisión se deben en su mayoría a ejercicios como el siguiente (la traducción es nuestra):

“Un tanque rectangular, de 40 cm de largo y 20 cm de ancho, se llena de agua hasta una altura de 12 cm. Si añadimos 4 litros de agua al tanque, el nivel del agua asciende hasta $\frac{1}{2}$ de la altura del tanque. ¿Cuál es la altura del tanque? [Dibujo de la situación]”

El problema del ejercicio es que en la capacidad del tanque influye el grosor de las paredes del mismo, y no se indica en ninguna parte que las medidas dadas son del interior, ni tampoco se puede deducir esto a partir del dibujo de la situación.

Existen otros errores de omisión en Singapur, como el siguiente (la traducción es nuestra):

“El área de un cuadrado es 4 cm^2 . Calcula la longitud del lado del cuadrado.

Lado x Lado = 4

$4 = 2 \times 2$, así que la longitud de un lado del cuadrado es 2 cm.

Decimos que la raíz cuadrada de 4 es 2 y escribimos $\sqrt{4}=2$ “

La omisión se encuentra en el hecho de que todo número positivo tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa. Por eso no se puede hablar, en sentido matemático, de la raíz cuadrada de 4, sino de la raíz cuadrada positiva de 4 o de una de las dos raíces cuadradas de 4.

De todo esto podemos concluir que, si bien los libros de Singapur contienen errores, éstos son en general muy diferentes de los que se pueden encontrar en los libros españoles, lo cual pone de manifiesto lo diferentes que son ambos conjuntos de libros entre sí.

Tras la revisión de los resultados de este último apartado, y basándonos en la fundamentación teórica, en el conjunto de errores matemáticos situado en los anexos y en los resultados de las pruebas estadísticas realizadas sobre ellos, aportamos datos que apuntan a la consecución del cuarto objetivo de nuestra investigación.

PARTE IV

FINAL

10. Conclusiones

Partiendo de toda la información recopilada en la fundamentación teórica, de los resultados obtenidos en nuestro estudio empírico, de las reflexiones que hemos plasmado en la discusión y de la información que figura en los anexos, llegados a este punto del informe podemos extraer las siguientes conclusiones:

1. Los libros de texto de Matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria de la modalidad Standard aprobados por el Ministerio de Educación de Singapur para el periodo 2009-2017 contienen errores matemáticos, entendiendo por error matemático en un libro de texto como la discrepancia entre lo expuesto en el libro de texto y lo que la matemática afirma acerca de lo expuesto en el libro de texto. En total se han identificado 686 errores matemáticos, lo que implica que lo que los alumnos pueden aprender con el uso directo de estos libros puede ser incorrecto, salvo que esta situación pueda ser compensada por el profesor.

Hemos cumplido, por tanto, el primer objetivo de esta investigación: identificar la existencia de error en los libros analizados.

2. En cuanto a la distribución de los errores matemáticos en los libros de texto, hemos comprobado que el número de errores oscila entre 259 errores, en el libro que más errores contenía (libro 1), y 97 errores, en el que menos (libro 4).

Los capítulos que más errores acumulan son los dedicados al bloque de contenidos de medida, en los que encontramos el 61% del total de errores. Por su parte, los capítulos del bloque de análisis de datos son los que menos errores contienen, un 3% del total (tan solo 20 errores).

En cuanto a la distribución de los errores por páginas, estos aparecen con una frecuencia media de aproximadamente dos errores por cada tres páginas.

Seccionando los libros en fragmentos de contenido mínimo que tienen sentido por sí mismo (un total de 2965 fragmentos), podemos afirmar que más del 20% de estos fragmentos está afectado de error.

Con estos datos hemos cumplido el segundo objetivo de nuestra investigación: describir la distribución de los errores matemáticos que pudieran encontrarse en los libros analizados.

3. En la clasificación de los errores por bloque de contenido al que pertenece el concepto matemático involucrado en el error, los errores están irregularmente distribuidos. El 64,4% de los errores pertenece al bloque de medida, mientras que el 19,4% de errores pertenece al bloque de aritmética, el 6,1% al bloque de álgebra, el 6% de errores al bloque de análisis de datos y, por último, el 4,1% restante (28 errores) pertenece al bloque de geometría.

En todos los libros de texto analizados, el porcentaje de errores de cada bloque de contenidos es similar. En los errores relacionados con contenidos de aritmética, oscila entre el 6% y el 13,5%; en los relacionados con contenidos de medida el porcentaje se encuentra entre el 42% y el 58%; para geometría, el intervalo de porcentaje oscila entre el 4% y el 11%; en análisis de datos, entre el 8% y el 27%; y por último, el porcentaje de errores relacionados con contenidos de álgebra oscila entre el 9% y el 21%.

La mayoría de los errores están en la parte correspondiente a ejercicios (90,5% de los errores totales), mientras que en la descripción de contenidos teóricos solo se han encontrado 65 errores (el 9,5% del total).

Los errores matemáticos identificados en los libros de texto de 6.º curso de Educación Primaria se han clasificado en cuatro tipos de error: mal uso de símbolos matemáticos (un 35% de los errores); errores debidos a omisión de premisas, pasos, contenido o datos (un 29% de los errores); falta de claridad en sus afirmaciones o planteamientos (un 22%); y errores de concepto o procedimiento matemático (un 14%).

Con estos datos hemos cumplido el tercer objetivo de nuestra investigación, que es clasificar los posibles errores que pudieran encontrarse en los libros analizados.

4. Analizando las relaciones existentes entre las diferentes clases de errores matemáticos, hemos podido comprobar que, en los libros de texto analizados, el número de errores de teoría está en proporción con el número de fragmentos de teoría y el número de errores en problemas está en proporción con el número de fragmentos de problemas (un 23%, o un error por cada cuatro o cinco fragmentos de contenido en ambos casos).

Además, en los capítulos dedicados a aritmética, medida y geometría (que contienen un 90% del total de los errores), para cada uno de los bloques de contenidos, los porcentajes de errores al clasificarlos en teoría y ejercicios son semejantes en uno y otro contexto (9,2% de errores en teoría y 90,8% de errores en ejercicios).

Finalmente, el hecho de no haber encontrado otras relaciones entre las distintas clases de errores, nos lleva a concluir que cada libro de texto estudiado posee características que lo hacen único y diferente al resto.

Con estos datos, hemos cumplido el cuarto objetivo de nuestra investigación, que es el análisis de las relaciones entre las diferentes clases de errores, y dado respuesta a todos los interrogantes que conformaban nuestro problema de investigación.

Como primera aportación de la tesis, hemos conseguido demostrar que los libros de texto de Matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria de Singapur tienen errores, sabemos dónde están localizados y cómo son. Por tanto, si la clave del éxito educativo de los estudiantes de Singapur en la evaluación internacional que mide los conocimientos matemáticos no se encuentra en la ausencia de errores que contienen los libros de texto que éstos utilizan, habrá otros aspectos diferenciadores que puedan explicar dicho éxito.

A continuación haremos algunas consideraciones acerca de las dificultades encontradas en este estudio y hacia dónde pueden encaminarse las líneas futuras de investigación que pueden llevarse a cabo a partir de este trabajo.

Dos factores muy importantes a tener en cuenta en la búsqueda futura de las claves diferenciadoras de Singapur, si bien con total seguridad no serán los únicos, son la formación del profesorado y la metodología docente.

Hablaremos de estos aspectos en nuestras reflexiones para la continuidad de este estudio en el futuro.

Nuestra prospectiva se ha enriquecido, además, por los hechos que se han revelado ante nosotros a lo largo de la elaboración de la tesis, particularmente en forma de metodología didáctica subyacente a los libros de matemáticas analizados. Considerando el fuerte hermetismo que caracteriza al régimen singapurense, la recopilación de estos hechos creemos que constituye una de las grandes aportaciones de esta tesis, teniendo en cuenta que puede servir de referencia en el estudio de la extrapolación de esta metodología en otros sistemas educativos, en particular el español.

11. Limitaciones

Todo proyecto de investigación, especialmente de la envergadura de una tesis doctoral, trae consigo una serie de dificultades. Estas dificultades son en ocasiones de índole metodológica, pero otras veces son obstáculos inherentes a la propia naturaleza del objeto de estudio o de las características circunstanciales de la propia investigación (Soriano, 2006). En nuestro caso, las limitaciones que hemos tenido que enfrentar han pertenecido a ambas categorías.

Podríamos empezar destacando que el análisis de contenido, incluso de contenido expreso, está expuesto a una dosis de subjetividad, en comparación con los métodos propios de las ciencias naturales, que precisa de una estricta aplicación del método científico. Pero también es cierto que la investigación cualitativa dispone de medios para compensarla que han sido cuidados en el presente trabajo de investigación.

Existió desde el principio otra dificultad bastante importante respecto del recurso objeto de estudio. Aun conociendo la lista de los libros de texto recomendados por el Ministerio de Educación de Singapur, creímos conveniente conocer sus frecuencias de uso, o incluso si existían otros materiales alternativos de uso frecuente en el aula. Además, nos planteamos, en principio, incluir los libros de las dos modalidades existentes, Standard y Foundation. Queríamos conocer el peso en porcentaje de alumnos de cada una de estas modalidades y el de los libros de texto dentro de cada una de ellas. Sin embargo, como ya vimos en el capítulo en el que hablamos de la muestra, el permiso para realizar una encuesta con la que obtener estos datos fue denegado por las autoridades de Singapur, por lo que nos vimos obligados a trabajar solamente con los libros de la modalidad Standard, si bien el hecho de que los contenidos de la modalidad Foundation es un subconjunto propio de los de la modalidad Standard justifica la elección de los libros de esta última.

Una vez concretada la lista de libros que formarían parte de la investigación, fuimos informados de que la venta de los libros del profesor (también conocidos como guías didácticas) a personas que no son profesores de Singapur es ilegal en ese país, lo cual también limitó el acceso a estos datos y el estudio de algunos aspectos de la

investigación, que se vio limitada al material que usan los alumnos; aspecto que, al menos, fue analizado en su totalidad, teniendo en cuenta que estudiamos a toda la población posible, es decir, todos los libros de texto de uso del alumno que tenían un carácter oficial.

El carácter autoritario del gobierno de Singapur se manifestó en nuestra contra en otras ocasiones. Al ser un sistema sumamente cerrado, aparte de los documentos oficiales no fue posible acceder a información específica acerca de los materiales didácticos que se utilizan en las aulas de Singapur, ni sobre las técnicas empleadas por los profesores en su día a día. Esa información habría enriquecido considerablemente el presente trabajo.

En cuanto a los propios resultados, un elevado número de análisis estadísticos de bondad de ajuste, de independencia y de homogeneidad de muestras dieron como resultados significaciones asintóticas pequeñas, por lo que no se pudo obtener información útil de ellos. En otros casos, la excesiva repetición de algunos tipos de error y la escasa aparición de otros produjo que muchas de las pruebas no pudiesen ser tomadas como concluyentes al caer por debajo de 5 algunas de las frecuencias. Serían necesarios más estudios que compensasen estas limitaciones, fortaleciesen y ampliaran el alcance de los resultados de nuestra investigación.

12. Prospectiva

Aunque el propósito de este trabajo ha sido la búsqueda de una respuesta a la pregunta de investigación, a través del cumplimiento de una serie de objetivos, esta investigación nos ha permitido realizar un acercamiento a una cultura educativa como es la singapurense, con una forma diferente (para nosotros) de seleccionar y presentar los contenidos en matemáticas, así como de trabajar la resolución de problemas.

En efecto, el análisis de los libros nos ha puesto de manifiesto que existen otras posibles estructuras para confeccionar los libros de texto, más allá de páginas maquetadas exactamente igual a lo largo de todo el libro, en las que la primera mitad muestra el contenido teórico (si procede, incluyendo ejemplos) y en la segunda se ofrece una lista de ejercicios. Esta es la forma en la que la inmensa mayoría de los libros españoles se llevan confeccionando desde hace años. Y de hecho, ni siquiera los nuevos libros adecuados a la nueva LOMCE (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa) incorporan importantes novedades a este respecto, a pesar del fuerte impulso que se ha dado a la formación del profesorado y la promoción de la innovación educativa.

En este capítulo, que consideramos que puede ser una de las contribuciones más importantes de nuestro estudio, mostramos algunos de los aspectos más relevantes resultantes del análisis de los libros de Singapur, no ya solamente desde el punto de vista de los errores que contienen, sino fundamentalmente en contraste a cómo están diseñados y estructurados los libros que conocemos y utilizamos en este país. La base de la comparación se realizará teniendo en cuenta los libros más utilizados en la Comunidad de Madrid en 2013, adecuados a la LOE, como a través de los nuevos libros de las mismas editoriales confeccionados para la nueva LOMCE. No en vano, los libros no solamente son una de las más importantes herramientas para el aprendizaje de los alumnos, sino que además son un reflejo de lo que se dispone en las leyes educativas. No se puede dejar de lado la intención del gobierno español, tanto de aumentar el porcentaje de alumnos encuadrables en los niveles 5 y 6 de aptitud definido en el informe PISA (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa), como de reducir por debajo del 15% el porcentaje de alumnos con niveles 1 o menor en el año 2020 (Ruiz Rosillo et al., 2016). Parece muy complicado lograr este último objetivo en el caso de las matemáticas, puesto que desde 2003 ese porcentaje no ha variado significativamente: alcanzó el máximo en

2006 con un 24,7% y el mínimo en 2015 con un 22,2%. Aunque la tendencia desde 2006 es descendente (ver Figura 96), la pendiente es muy suave y se requiere reducir la cifra actual en un tercio (OCDE, 2016c).

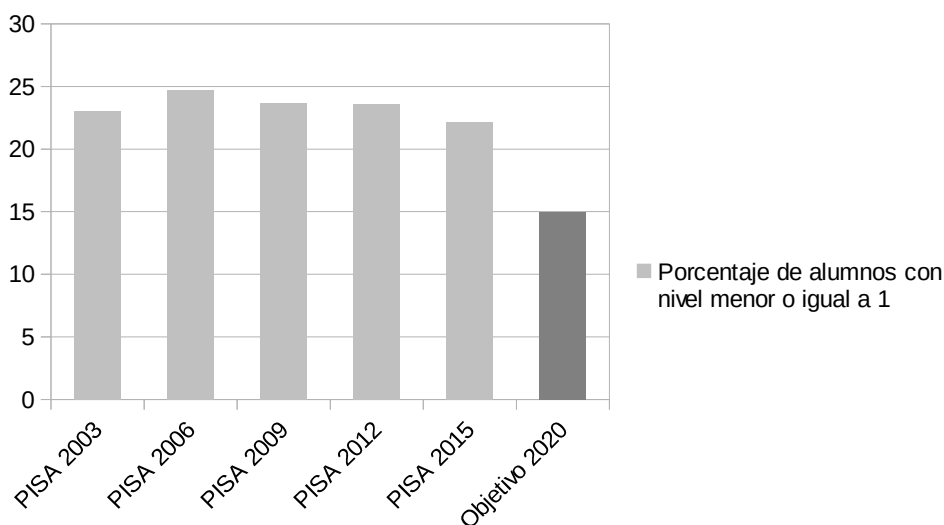


Figura 96: Evolución del porcentaje de alumnos con nivel menor o igual a 1 en las pruebas PISA desde 2003. Fuente: elaboración propia a partir de OCDE, 2016c.

Creemos que tanto la selección de los contenidos (el currículo) como la forma en la que se materializa el mismo en forma de libro de texto y, por supuesto, la metodología mediante la cual dichos contenidos se llevan al aula tienen mucho que aportar a la educación española, por lo que de forma natural surge la inquietud de investigar sobre todos estos aspectos y en particular sobre cómo se podrían extrapolar para ser utilizados en nuestro país. Recogemos en los siguientes apartados la información que consideramos más importante en ese sentido, con el afán de ofrecer un punto de partida para las investigaciones que pretendan enfrentarse a esa inquietud.

Dividiremos este capítulo en dos partes. La primera irá dedicada a los aspectos formales de los libros de Singapur, es decir, la forma en que éstos presentan los contenidos a los alumnos. La segunda parte se centra en los contenidos propiamente dichos. En ambos casos, los compararemos con los libros más utilizados en la Comunidad de Madrid (Fernández Palop et al., 2013), tanto LOE como LOMCE.

En aquellas partes en las que se reproducen enunciados de problemas, éstos han sido modificados para preservar la autoría de los libros a los que pertenecen, tanto en los libros españoles como en los singapurenses. Las modificaciones, aunque lleguen a afectar a los datos, no afectan al espíritu del problema en la faceta que se pretenda poner de manifiesto con su ejemplo.

12.1. Aspectos formales

En este apartado mostraremos una serie de particularidades que, al analizar los libros de texto, nos han llamado la atención en la forma en que los libros de Singapur muestran los contenidos al alumno, en contraste a la forma en la que lo han venido haciendo los libros más utilizados de la Comunidad de Madrid, tanto los adecuados a la LOE como a la LOMCE.

La estructuración física de los libros, la organización de los contenidos en cada capítulo y especialmente la maquetación de las páginas es lo primero que salta a la vista cuando se realiza una evaluación preliminar de un libro. En este apartado nos referiremos a las diferencias que hemos advertido en este aspecto en los libros de Singapur.

12.1.1. Extensión de los capítulos

Con respecto a la extensión de los capítulos, existe una circunstancia interesante en los cuatro libros de 6.º curso de Matemáticas de Educación Primaria más utilizados en la Comunidad de Madrid en 2013. Probablemente por un afán de ser predecibles y no desconcertar al alumno, o quizá para segmentar más regularmente los contenidos para ayudar al profesor a planificar sus exámenes, o por intereses de edición de las editoriales, los capítulos tienen todos aproximadamente el mismo número de páginas. Este número es típicamente 14 o 16, con escasas excepciones con 12 o 18 páginas para los libros correspondientes a la LOE. En los libros de la más reciente LOMCE se sigue manteniendo una fuerte regularidad en cada libro, aunque los rangos varían ligeramente de uno a otro. Las longitudes más frecuentes siguen siendo 14 y 16 páginas por capítulo. Las editoriales se aseguran de que los libros tengan capítulos con un número par de páginas, por lo cual todos los capítulos comienzan en una página par. Teniendo en cuenta la rígida organización de los libros y las diferentes dificultades de los contenidos presentes en unos temas y otros, en algunos casos los autores probablemente han debido ampliar el temario más allá de lo necesario y en otros habrán recortado contenidos para ajustarse al tamaño requerido del capítulo.

En Singapur, en cambio, cada capítulo ocupa tantas páginas como es preciso. Los temas más sencillos, como el de diagramas de sectores, ocupan pocas páginas (entre 8 y 14, según el libro) mientras que los temas más complejos, como razón, tienen entre 20 y 36 páginas, dependiendo del libro. A diferencia de lo que ocurre con los libros españoles, no se obliga a comenzar los capítulos en páginas de una paridad concreta. Sencillamente, a continuación de cada capítulo comienza el siguiente.

Hemos de recordar otro aspecto esencial de la educación de Singapur, y es que su lema es “teach less, learn more”. El número de páginas de los libros españoles y los singapurenses no son comparables. Los segundos tienen menos unidades de análisis y más páginas (contribuyendo así al desahogo a que hacíamos referencia más arriba), al tiempo que no manipulan artificialmente la longitud del capítulo para adecuarse a su propio estándar.

12.1.2. Formato del capítulo

En los libros de Matemáticas de Singapur analizados, al igual que en los de España en un estudio previo, los capítulos están divididos en secciones dedicadas a distintas funciones. Éstas dependen de cada libro, pero suelen separarse los ejercicios resueltos y semirresueltos de los ejercicios para el alumno, y después puede haber secciones para reflexionar, repasar o ampliar, aunque existe una fuerte dependencia de la editorial. A diferencia de lo que ocurre en España, sin embargo, estas secciones no tienen una longitud predeterminada. En España los capítulos siguen formatos muy homogéneos en todos los libros:

- Al comienzo del capítulo, hay una página introductoria de presentación del tema con una historia a modo de introducción.
- A continuación, aparecen una serie de secciones, dedicadas cada una de ellas a un concepto concreto, de una o, casi siempre, dos páginas cada una. La primera página contiene contenidos teóricos en la parte superior y ejercicios en la parte inferior. Si hay una segunda página, entonces ésta se dedica a ejercicios.
- Al final del capítulo, encontramos una nueva batería de ejercicios de repaso de todo el tema.

En los libros de Singapur, por contra, cada sección de un capítulo se dedica a un concepto, pero el contenido se extiende a tantas páginas como necesite. Algunos capítulos (especialmente de aritmética) carecen de contenidos teóricos, y empiezan directamente con ejercicios resueltos. Además, el número de secciones en que se divide cada capítulo no es fijo, sino que depende de lo que se pretenda abarcar de contenido en ese tema en cuestión.

12.1.3. Saturación de contenido en las páginas

El formato de página de los libros de Matemáticas de Singapur sorprende porque da la impresión de menor saturación de contenido cuando se abre. Es muy normal, de hecho, que una página entera se dedique a un solo ejercicio (resuelto o semiresuelto, o incluso que un ejercicio abarque más de una página).

Esta impresión contrasta con la maquetación habitual en los libros españoles. En ellos, como generalmente hay elementos al margen (para recordatorios, datos curiosos, información complementaria, etc), aun en las páginas que no contienen ninguno de estos elementos el contenido principal está sujeto a márgenes muy amplios, lo que obliga al texto a aglutinarse en un espacio menor. En otras ocasiones sucede justo lo contrario: se aprovecha la página al máximo, haciendo uso de un formato a dos columnas (esto generalmente se aplica a las páginas de ejercicios). En Singapur, en cambio, los márgenes son estrechos porque no hay que reservar espacio para objetos, lo que da una sensación de holgura.

Además, los libros de Singapur son muy lineales. Salvo algunos bocadillos con recordatorios o preguntas junto a los ejercicios o contenidos teóricos a los que hacen referencia, toda la información se lee de izquierda a derecha y de arriba a abajo. Esto, bien por la doble columna o bien por la presencia de textos al margen, no se cumple así en muchas ocasiones en los libros de España. De hecho, solamente en uno de los libros revisados adecuados a la LOMCE es relativamente lineal, al carecer de elementos en los márgenes. Sin embargo, sigue utilizando frecuentemente varias columnas en las exposiciones teóricas y en las páginas de ejercicios.

12.1.4. Secciones dedicadas a las estrategias de resolución de problemas

Como punto positivo de los libros españoles, podemos decir que, según la editorial, además se pueden incorporar (muy acertadamente desde nuestro punto de vista) secciones que enseñan técnicas de resolución de problemas, de cálculo mental, etc, así como una página resumen. En Singapur, excepto por el cálculo mental, que no es una habilidad que se entrene en absoluto, también existen ese tipo de secciones al final del tema. En algunos casos, como en el tema dedicado al cálculo de ángulos en figuras geométricas, el repaso de las reglas que se deben utilizar puede figurar al principio del tema. Aunque en los libros de textos de Matemáticas de Singapur parece que no se pone el mismo énfasis que en España por incluir técnicas de resolución de problemas, debemos recordar que en Singapur es la base de su formación matemática y se enseña mediante el Modelo de Barras, que permite resolver problemas aritméticos muy variados. Tres de los cuatro libros de Singapur contienen un capítulo al final dedicado en exclusiva a estrategias de resolución de problemas y el libro restante contiene algunos capítulos de ejercicios de ampliación.

12.1.5. Secciones de repaso

En tres de los cuatro libros de Matemáticas de Singapur analizados encontramos que cada capítulo o cada dos capítulos contienen unas secciones dedicadas al repaso de contenidos anteriores, que en realidad consisten en una recopilación de ejercicios. Estas secciones normalmente tienen el nombre de “review” cuando los ejercicios se corresponden con los contenidos del libro previos a la propia revisión, y de “revision” cuando, además, incluyen ejercicios de cursos anteriores que no han sido repasados en el curso actual. En el libro que no tiene estas secciones intercaladas nos encontramos con que hay dos secciones de revisión al final del último capítulo del libro.

En los libros de la Comunidad de Madrid también existe esta práctica, aunque con diferencias. En los libros previos a la llegada de la LOMCE, solo en dos de ellos aparecen secciones de repaso cada 5 capítulos (lo que se estima que se tiene que impartir en un trimestre), pero exclusivamente con ejercicios de ese trimestre. Los otros dos libros tienen, al final de cada capítulo, una página con 10-15 ejercicios variados de todo lo visto durante el curso, pero en ningún caso incluyen ejercicios de

cursos anteriores. En realidad, hacerlo no tendría sentido en nuestra opinión, puesto que prácticamente no existen conceptos en cursos anteriores que no sean revisitados en 6.º curso de Educación Primaria.

Por su parte, todos los libros adecuados a la LOMCE contienen un repaso trimestral, pero además dos de ellos tienen añadido un pequeño repaso al final de cada capítulo (entre 10 y 15 ejercicios). En uno de los libros, además, algunos de los ejercicios versan sobre contenidos de cursos anteriores que ya no se incluyen en 6.º curso de Educación Primaria. Es, pues, el único libro que muestra un cierto parecido con las prácticas generales de Singapur.

Una diferencia importante entre estas secciones de repaso y las de los libros de Singapur (al menos, las de tres de los cuatro libros) es que nuevamente el formato de la página hace que los ejercicios se aglutinen (se disponen a doble columna) o su número decrezca. En los libros de Singapur no parece importar que en una página quepan solamente 3 ejercicios, si con ello los diagramas, tablas o dibujos se ven con el tamaño adecuado. Por esta razón, y porque normalmente el número de ejercicios es elevado, estas secciones pueden ocupar 6 páginas o más (si es necesario).

12.1.6. Contexto narrativo

En los libros de texto de Matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria analizados por Fernández Palop (2013) no existe ningún contexto a través del cual todos los capítulos tengan una identidad común, excepto el formato de páginas y capítulos que como ya hemos visto es muy rígido. En dos de los libros de Matemáticas de Singapur, en cambio, existe una serie de personajes con sus respectivos nombres que constantemente forman parte de la decoración de las páginas, aparecen dando pistas o haciendo preguntas al lector y, en ocasiones, son los protagonistas de algunos ejercicios. Como curiosidad, en uno de los libros se presenta al personaje llamado “Googol”, cuyo nombre hace referencia a la matemática al ser el nombre que recibe el número 10^{100} (aunque este hecho no se indica en ninguna parte del libro, el profesor debería ser el encargado de decírselo a los alumnos).

En los otros dos libros no existen esos personajes tan definidos, aunque aquéllos que se utilizan para adornar las páginas y comunicarse con el lector son siempre los mismos, dando una continuidad y dotándoles de personalidad a medida que avanza el libro.

12.1.7. Ejercicios resueltos y semirresueltos

Una de las ideas que salta a la vista al revisar los libros de Matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria de Singapur es la cantidad de ejercicios resueltos y semirresueltos que existen. Un 12% de todos los ejercicios contenidos en los libros de texto de Singapur son ejercicios resueltos, frente al 5% encontrado en los libros de Matemáticas más utilizados en la Comunidad de Madrid antes de la puesta en vigor de la LOMCE.

El uso de los ejercicios resueltos no es un hecho nuevo ni aislado en educación, especialmente en matemáticas. Numerosos estudios avalan sus bondades (Atkinson, Derry, Renkl y Wortham, 2000; Renkl, Stark, Gruber y Mandl, 1998; Ruiz y Zamora, 2012; Schworm y Renkl, 2002; Xinming y Simon, 1987).

En los libros de Matemáticas más utilizados de la Comunidad de Madrid en el periodo 2009-2013, sin embargo, encontramos que no hay ejercicios semirresueltos, y solo la mitad de ejercicios resueltos que en los libros de Singapur analizados (apenas un 6,3% del total de ejercicios). Los ejercicios resueltos se utilizan normalmente para ejemplificar un concepto, y suele haber a lo sumo uno en cada apartado del capítulo. Sin embargo, en los libros de Singapur, no se utilizan tanto para ejemplificar conceptos sino para enseñar procedimientos. Aquí se pone de manifiesto la orientación del currículo singapurense de Matemáticas, en el que todo orbita alrededor de la capacidad de resolución de problemas.

Aparte de los ejercicios resueltos, los libros de Singapur analizados exhiben multitud de ejercicios semirresueltos. No deben confundirse los ejercicios semirresueltos con las mecánicas de ejercicios del tipo completar la tabla o rellenar los huecos. Un ejercicio semiresuelto contiene los diagramas a partir de los cuales se deducen las operaciones. Asimismo, aparecen redactados todos los pasos necesarios para resolver el ejercicio. Lo que los diferencia de un ejercicio resuelto es solamente que existen algunos valores (pueden ser resultados finales o valores intermedios) que se han omitido y han sido sustituidos por casillas vacías para que el alumno las rellene. Véase el siguiente ejemplo:

Un cubo de acero tiene 343 cm^3 de volumen. ¿Cuál es la longitud de una arista de ese cubo? (Se muestra un cubo y una línea de cota sobre una arista, pero en lugar de cifra de cota hay una interrogación)

Volumen del cubo = 343 cm^3

Longitud de la arista = = cm

Los ejercicios semirresueltos son un recurso muy utilizado en tres de los cuatro libros de Singapur analizados (en el Libro 4 se usan muy poco). En total, aun incluyendo el Libro 4, un 10,22% de los ejercicios son semirresueltos (si solamente contamos los Libros 1, 2 y 3, el porcentaje asciende hasta el 11,65%). Por lo tanto, entre todos los ejercicios contenidos en los cuatro libros de Singapur, aproximadamente un 22% (o uno de cada cinco) son ejercicios resueltos o semirresueltos, lo que proporciona al alumno una importante cantidad de información sobre los procedimientos a emplear para resolver un problema, da pistas o plantea los ejercicios por el alumno y, muy importante, enseña buenas prácticas como son la redacción de los resultados y la explicación de los pasos a medida que se van realizando.

En muchas ocasiones, especialmente cuando se está introduciendo un concepto nuevo, los libros de Singapur emplean una secuencia de ejercicios formada por un ejercicio resuelto que ilustra o en el que se utiliza dicho concepto, un segundo ejercicio semiresuelto muy similar al anterior, y por último un ejercicio convencional para que lo resuelva el alumno sin ayuda, también muy parecido a los otros dos.

12.2. Aspectos de contenido

En esta segunda sección nos referiremos a los contenidos propiamente dichos y las diferencias entre los presentes en los libros de Matemáticas de 6.º curso de Singapur y los más utilizados en la Comunidad de Madrid para la LOE, así como los que las mismas editoriales han confeccionado para la LOMCE.

12.2.1. Estrategia Concrete – Pictorial – Abstract

En la metodología empleada en Singapur para la enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria se utiliza la estrategia de progresión Concrete – Pictorial – Abstract, en la que cada contenido es presentado al alumno de una forma secuencial (Ginsburg y Leinwand, 2005; Hoong et al., 2015). En primer lugar, de forma concreta

(mediante materiales didácticos y representaciones de objetos, por ejemplo). En segundo lugar, se hace una representación iconográfica del concepto. Ésta sirve de puente entre la forma concreta y la última, la forma abstracta, en la que se muestran las expresiones puramente matemáticas.

En los libros españoles consultados no es frecuente encontrar esta estrategia. A menudo, cuando se hace uso de representaciones gráficas, éstas hacen referencia a la fase concreta y de ella se pasa directamente a la abstracta. En muchas ocasiones, debido a la inclinación algorítmica de los contenidos (como la suma de fracciones con distinto denominador), la única fase que se muestra es la abstracta. Esta desvinculación entre las matemáticas y el mundo real acarrea serios problemas en los alumnos que muestran dificultades en la comprensión de las matemáticas abstractas (Ginsburg y Leinwand, 2005).

Como ejemplo de la aplicación de las fases concreta, iconográfica y abstracta encontramos la división entera (Fang et al., 2011) y, como base de la resolución de problemas, el modelo de barras, el cual merece un tratamiento especial como icono de la educación matemática de Singapur.

12.2.1.1. El modelo de barras

Aunque son muchos los factores a tener en cuenta si se pretende analizar y explicar el éxito del sistema educativo de Singapur respecto a otros, existe uno en particular en el que merece la pena detenerse, especialmente por ser una contribución de Singapur a la educación matemática del mundo entero.

Como ya hemos visto, las instituciones educativas competentes han puesto el énfasis de la formación en matemáticas de los alumnos de Singapur en la resolución de problemas. Tanto es así, que desarrollaron una metodología novedosa, una estrategia que pretende mejorar el porcentaje de éxito en la adquisición de las habilidades necesarias para que el alumno sea capaz de resolver problemas exitosamente.

En Singapur se desarrolló en los años 80, junto con el New Education System (como vimos anteriormente), un método muy versátil para la resolución de problemas de enunciado, que hoy en día caracteriza el sistema educativo singapurense. Este

método, llamado modelo de barras (*bar model method*) puede explicar en parte el éxito de los estudiantes de Singapur en las pruebas de evaluación internacional en que ha participado.

El modelo de barras es una estrategia para representar gráficamente los datos de un problema de enunciado. Este método ayuda a comprender las relaciones entre los datos suministrados en el enunciado con los datos que se piden en el problema, de modo que facilita al alumno la comprensión de las operaciones que debe realizar para resolverlo.

Es un método extensivamente utilizado, hasta el punto de que es prácticamente imposible encontrar un alumno de 6.º curso de Educación Primaria en Singapur a quien no se haya enseñado previamente este modelo.

Por último, conviene mencionar que entre las ventajas del uso de esta metodología se encuentran los hallazgos de recientes estudios neurológicos acerca de la actividad cerebral durante la resolución de problemas (Lee et al., 2007; 2010) los cuales arrojan interesantes resultados. Según se indica, el uso del álgebra simbólica en la resolución de problemas de enunciado activa con más intensidad áreas cerebrales relacionadas con la atención y con la memoria de trabajo que el uso del modelo de barras. Esto puede llevar a la conclusión de que se requieren más recursos cognitivos para hacer uso del álgebra simbólica, y por tanto es razonable el empleo del modelo de barras para resolver problemas en etapas cognitivas tempranas antes de acudir al álgebra simbólica, puesto que se adapta mejor a las capacidades del cerebro del alumno.

12.2.1.1.1. Mecánica del modelo de barras

Para poder resolver un problema, es muy importante la visualización de los datos de que disponemos y de su manejo para dar una respuesta correcta, desprovista de cualquier información superflua que el enunciado pueda ofrecer. De hecho, la forma en que los datos son representados tiene una gran influencia sobre el resultado del aprendizaje (Ho y Lowrie, 2014). En el fondo, una importante proporción de los problemas de enunciado se basan en la manipulación aritmética de los datos que se proporcionan. Es a este tipo de problemas de enunciado al que está dirigido el modelo de barras.

En una lista similar a la ofrecida por Polya (1957) para la resolución de problemas matemáticos generales (Santos Trigo, 1996), Cabo Nodar y Moreno Pineda (2007) explicitan los pasos a seguir para aplicar el modelo de barras:

- Leer con atención el problema completo.
- Identificar los sujetos del problema.
- Dibujar una barra unidad para cada uno de ellos.
- Leer el problema de nuevo, haciendo paradas en cada dato numérico del enunciado.
- Etiquetar las barras unidad con los datos suministrados por el enunciado.
- Identificar la cantidad desconocida que constituye la pregunta del problema y etiquetarla.
- Realizar las operaciones correspondientes y escribir el resultado en el gráfico.
- Redactar, como una oración completa, la solución del problema.

El núcleo del método consiste en la representación de barras (rectángulos) que representan las cantidades involucradas en el problema, tanto las conocidas como las desconocidas. La representación gráfica del enunciado es clave. Según Ho y Lowrie (2014), dibujar diagramas representando las relaciones entre cantidades ayuda en el entendimiento y la resolución de problemas que no tienen por qué ser gráficos.

Al disponerlos gráficamente, los datos conocidos y desconocidos se organizan de relativamente pocas formas diferentes, lo que facilita al alumno la identificación de la operación que corresponde a cada una de ellas. El mayor problema del método generalista de Polya (1957) es que no indica al alumno qué operación debe hacer con los datos, y lógicamente no es factible que un método absolutamente general pueda orientar al alumno en este sentido. De hecho, el no identificar la operación que los alumnos deben realizar con los datos es un problema muy común, puesto de manifiesto entre otros por England (2010). En esas situaciones, o bien los alumnos buscan palabras clave en el enunciado que traducir en operaciones, a veces de forma incorrecta, o bien simplemente realizan una operación más o menos al azar. Mediante el modelo de barras se minimiza esta dificultad. Además, etiquetar los datos desconocidos ayuda al alumno a no olvidarse de responder el problema en su totalidad, fuente común de error en los problemas de múltiples pasos.

Otra faceta fundamental en la aplicación del modelo de barras radica en la reducción a la unidad. El alumno debe identificar las partes de las barras que son “unitarias” y que nos permiten hacer comparaciones con otras partes o con otras barras, y así identificar relaciones entre unos valores y otros. Esto es especialmente importante cuando las cantidades involucradas son fracciones, como veremos más adelante. Por ejemplo, si en el enunciado se habla de un quinto de una cantidad desconocida, se debe proceder dibujando una barra que representa el total, dividirla en cinco partes (que serán las barras unidad) y coloreando o sombreando una de ellas.

Las barras deben representar lo más fielmente posible la situación descrita en el enunciado. Esto en ocasiones significa que deben cumplir varias condiciones a la vez, con lo que el alumno puede haber dibujado en primera instancia unas barras para cumplir la primera condición del enunciado pero no una segunda. En ese caso, debe dibujarse una nueva versión de las barras para adecuarse a la situación. Por ejemplo, después de dibujar dos barras que representan números cuya suma es cierta cantidad, el enunciado además dice que uno de los números es el triple que el otro. Siendo muy improbable que por azar las barras cumplan esta segunda condición, el alumno deberá dibujar una segunda versión del modelo, en el que además una de las barras sea el triple de grande que la otra.

Por otro lado, precisamente por la necesidad de comparar fragmentos y buscar unidades comunes en distintas barras es especialmente importante que las barras tengan tamaños realistas. Ésta es una condición especialmente difícil de cumplir cuando hay que dibujar una barra cuya longitud se desconoce, como nos muestra Cheong (2002). En la medida de lo posible, sin embargo, para aplicar correctamente el modelo de barras es conveniente ser consciente de que la representación debe ser precisa y que las barras deben respetar las proporciones entre unas y otras, pues de lo contrario podrían llevar a conclusiones erróneas o hacer más difíciles de percibir las relaciones entre unidades.

El modelo de barras es heredero conceptual de los esquemas descritos por Greeno (Nesher, Greeno y Riley, 1982). Existen tres formas de aplicar el modelo de barras (Englard, 2010; Ho y Lowrie, 2014; Hong et al., 2014; Hoven y Garelick, 2007; Jackson, 2005), aunque la última, por razones que veremos más adelante, no es mencionada por todos los autores. Es importante señalar que el mismo problema puede ser resuelto correctamente de diferentes formas, esto es, no necesariamente cada problema trae asociado un único modelo.

También es notable el hecho de que los nombres de las tres formas de aplicar el modelo de barras (Modelo Todo-Parte, Modelo de Comparación y Modelo Antes-Después) no figuran más que en la literatura científica que describe el modelo, pero no en los propios libros de texto de Singapur con los que se ha trabajado en el desarrollo de esta tesis.

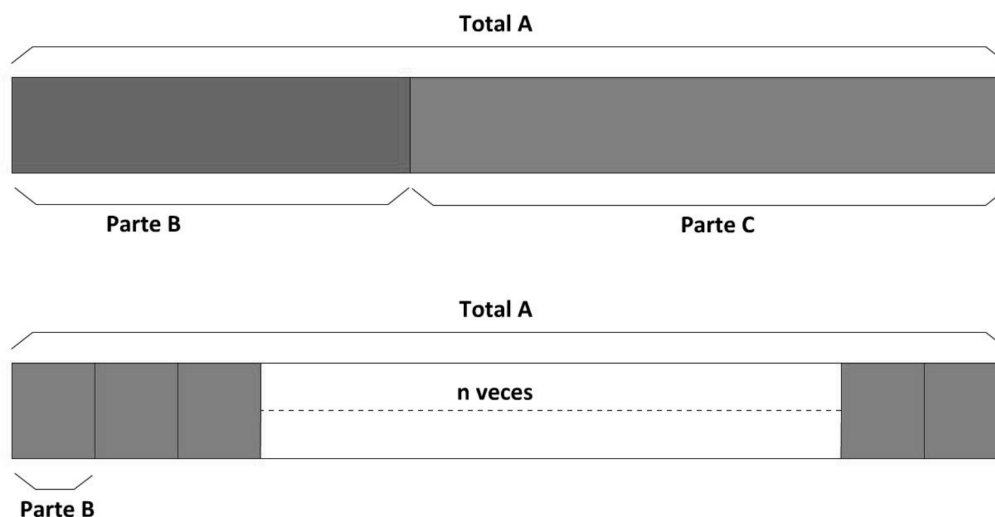


Figura 97: Tipologías de modelo Todo-Parte.

Fuente: Elaboración propia.

La primera de las tipologías (la barra superior en la Figura anterior) correspondería a un ejercicio en el que hay tres cantidades involucradas, dos de ellas son las partes y la tercera es el total. Las operaciones necesarias para resolver el ejercicio son sumas o restas. El alumno puede conocer la operación que debe realizar para satisfacer el enunciado, ya que:

$$A = B + C$$

$$B = A - C$$

$$C = A - B$$

La segunda de las tipologías (la barra inferior en la Figura anterior) modeliza la situación en la que hay un número n de cantidades involucradas, todas ellas iguales, las cuales en total componen el total. En este caso, las operaciones involucradas son productos y divisiones. Estas operaciones son las siguientes:

$$A = B \times n$$

$$B = A \div n$$

$$n = A \div B$$

Todas las operaciones anteriores son independientes de la forma en que esté redactado el enunciado.

12.2.1.1.3. Modelo de Comparación

El segundo tipo de modelo de barras se aplica en situaciones en las que la mejor estrategia consiste en comparar dos situaciones distintas. El alumno debe dibujar una barra por cada una de estas dos situaciones, de modo que tendrá dos barras alineadas con longitudes diferentes. Cuando el problema involucra además la suma de las dos barras, es decir, el total de las cantidades, se dibuja un segmento vertical a la derecha de ambas barras (ver Figura 97). Como en el modelo Todo-Parte, es muy importante etiquetar adecuadamente todos los elementos dibujados. En la Figura 98 podemos ver los casos de suma y resta para el caso en que el total no está involucrado.

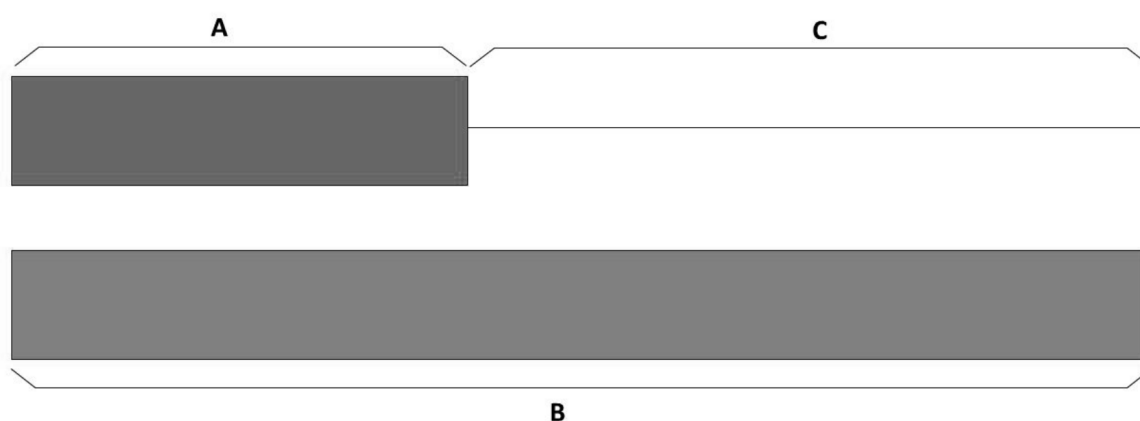


Figura 98: Modelo de Comparación para suma y resta sin total.

Fuente: Elaboración propia

La anterior disposición pone de manifiesto las siguientes relaciones entre las cantidades:

$$A = B - C$$

$$B = A + C$$

$$C = B - A$$

Este modelo también es aplicable a situaciones en las que una de las cantidades es un múltiplo de la otra, lo cual dará lugar a operaciones de producto o división. Estas situaciones se reflejan en la Figura 99.

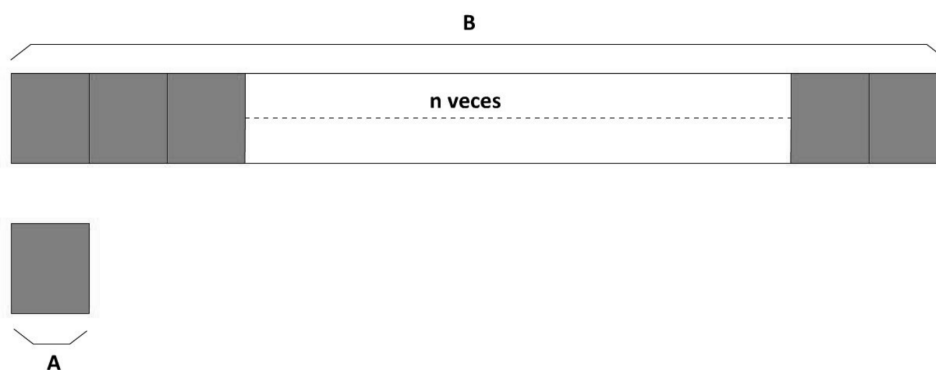


Figura 99: Modelo de Comparación para producto y división sin total.

Fuente: Elaboración propia.

En este caso, las operaciones que extraemos del modelo son las siguientes:

$$B = n \times A$$

$$A = B \div n$$

$$n = B \div A$$

Sin embargo, cuando el total también forma parte del enunciado, ya sea como dato o como incógnita, el alumno debe representar el problema, como antes comentábamos, con el total como un segmento vertical. Es importante señalar que, en principio, este tipo de problemas no se puede representar mediante Todo-Parte porque en Todo-Parte los datos del enunciado relacionan las cantidades con el total, mientras que en el caso de comparación las cantidades del enunciado se comparan unas con otras. La Figura 100 muestra la forma de representar estos problemas.

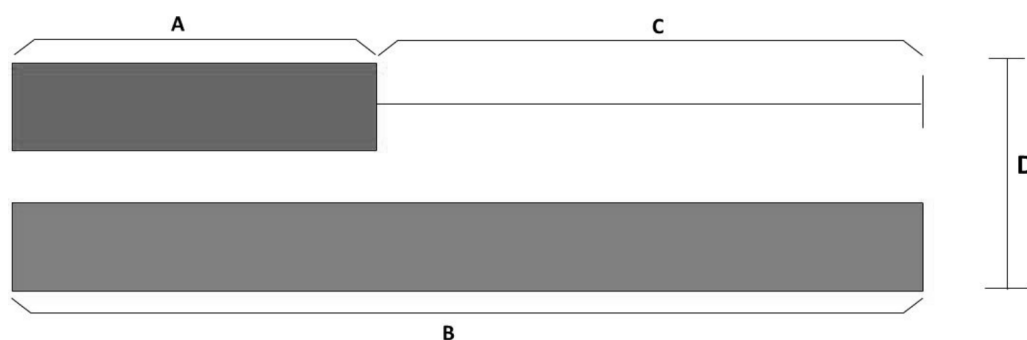


Figura 100: Modelo de Comparación para suma y resta con total.

Fuente: Elaboración propia.

Las operaciones que nos conducirán a dar valor a A, B, C o D serán las siguientes:

$$D = A + B$$

$$A = D - B$$

$$B = D - A$$

$$C = B - A$$

Cabe destacar la necesidad por parte del alumno de hacer un análisis previo de los números involucrados. El alumno debe decidir cuál de las dos cantidades es más grande, lo cual solamente puede saber o bien de forma directa si el enunciado da las dos cantidades o porque el enunciado lo indica más veladamente, indicando que una de las cantidades es n unidades mayor o menor que la otra. No hacer este análisis podría dar lugar a una representación que lleva a confusión, pues podría representarse una cantidad con una barra mayor que la de otra cantidad, cuando el valor es en realidad menor.

12.2.1.1.4. Modelo Antes-Después

Este último tipo de modelo de barras se aplica cuando la situación a que se refiere el enunciado implica un estado anterior y uno posterior, pudiendo estar algunos datos en ambos estados. Para enunciados simples, el modelo no tiene ninguna diferencia con el modelo de Comparación, o incluso en ocasiones es posible aplicar el modelo Todo-Parte.

Sin embargo, para enunciados complejos este modelo se nutre de los anteriores, en el sentido de que el alumno representará dos grupos de barras (una para antes y otra para después), que según cómo estén ofrecidos los datos seguirán el modelo Todo-Parte o el modelo de Comparación. El alumno deberá buscar datos comunes en ambas situaciones para poder completarlas y aplicar lo que ya sabe de los modelos anteriores para resolver el problema.

La estrecha relación que guarda con los dos modelos ya mostrados hace que no siempre se considere un modelo propiamente dicho. Al fin y al cabo, muchos problemas resolubles mediante este modelo se pueden resolver también mediante el modelo de Comparación (comparando las dos barras, una para el estado “antes” y otra para el “después”), con lo cual el modelo Antes-Después tiene un cierto carácter superfluo. No obstante, la fácil identificación de los enunciados susceptibles de ser resueltos mediante el modelo Antes-Después puede hacer que el alumno encuentre muy útil conocer este modelo.

12.2.1.1.5. Estrategias a aplicar en enunciados más complejos

Los problemas más sencillos, para primero, segundo y tercero de Educación Primaria, se pueden resolver en un solo paso con las fórmulas antes suministradas. Sin embargo, a partir de cuarto curso de Educación Primaria empiezan a aparecer problemas de múltiples pasos que a veces requieren técnicas más sofisticadas y deducciones menos superficiales. Para hacer estas deducciones lo único imprescindible es aplicar una lógica correcta, aunque existen algunas estrategias más o menos generales que se pueden aplicar para hallar el valor de la unidad del problema.

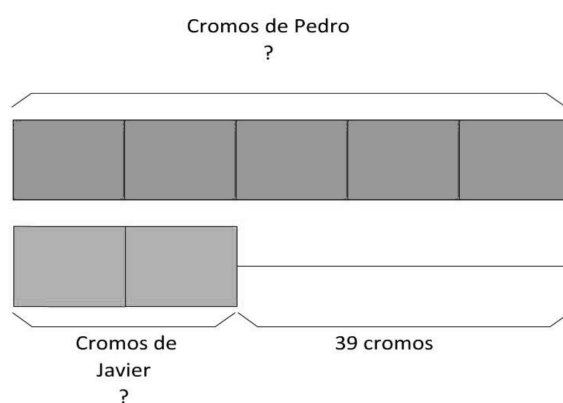


Figura 101: El problema de los cromos. Paso 1.

Fuente: Elaboración propia.

Aplicamos la técnica eliminando las dos unidades de cada barra a la izquierda. El resultado sería el mostrado en la Figura 102.

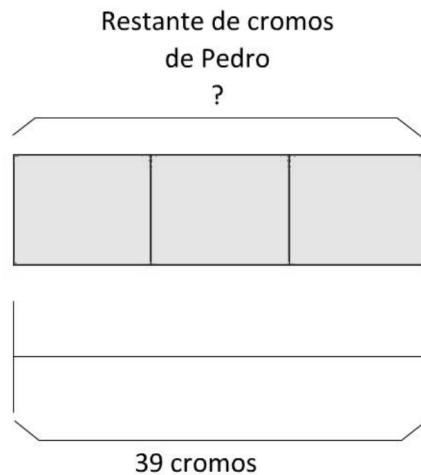


Figura 102: El problema de los cromos. Paso 2.

Fuente: Elaboración propia.

Ahora se pone de manifiesto que tres unidades son 39 cromos, luego podemos calcular el valor de una unidad:

1 unidad = $39 \text{ cromos} \div 3 = 13 \text{ cromos}$.

Pedro tiene 5 unidades: $5 \times 13 \text{ cromos} = 65 \text{ cromos}$ tiene Pedro.

Javier tiene 2 unidades: $2 \times 13 \text{ cromos} = 26 \text{ cromos}$ tiene Javier.

12.2.1.1.5.2. Reducción a una barra unidad común

La segunda técnica ya ha sido utilizada en ejemplos anteriores: identificación de la unidad común a distintas barras. Si dos barras tienen unidades diferentes, se puede reducir todo el modelo a la misma unidad, en el equivalente al cálculo del mínimo común múltiplo. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema:

“Amelia, que es pastelera, vende por la mañana $\frac{3}{5}$ de las tartas que ha hecho. Por la tarde vende $\frac{1}{4}$ de las tartas que le quedan. Si por la mañana vendió 200 tartas más que por la tarde, ¿cuántas tartas había hecho?”

Si representamos el modelo que se ajusta al problema, hará falta aplicar el modelo Todo-Parte para la primera parte del enunciado, y el modelo de Comparación para la segunda. Pero vamos con la primera parte. Por la mañana vende tres quintas

partes, de modo que se divide el total en cinco bloques, de los que tres son las tartas vendidas por la mañana. Del resto, una cuarta parte se venden por la tarde, por lo que se divide en cuatro partes (de hecho, cada bloque ya existente se divide en dos) y tomamos una de ellas. El modelo correspondiente está en la Figura 103.

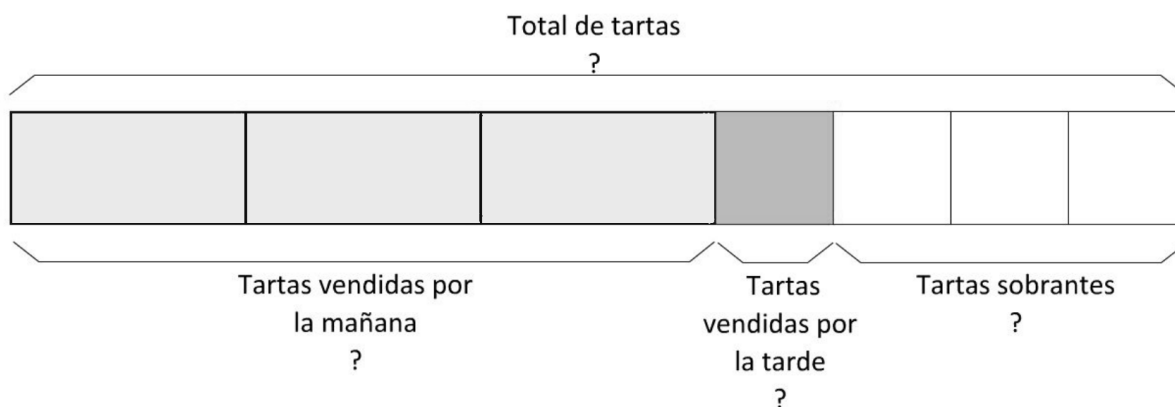


Figura 103: El problema de los pasteles. Paso 1.

Fuente: Elaboración propia.

Para poder hacer cualquier deducción, será necesario disponer de una única unidad, pero tenemos dos diferentes: una proveniente de las tartas vendidas por la mañana y otra de las vendidas por la tarde. La técnica entonces es dividir la barra entera en trozos del mismo tamaño. Por los datos del ejercicio, basta dividir las unidades de tartas vendidas por la mañana en dos, puesto que las tartas vendidas por la tarde son la mitad de grandes que ellas. El planteamiento quedaría representado de la siguiente forma (Figura 104):

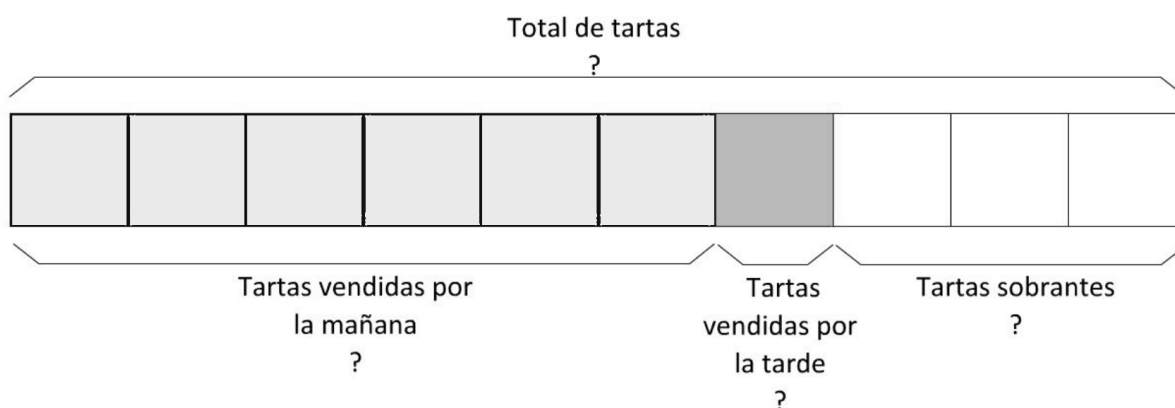


Figura 104: El problema de los pasteles. Paso 2.

Fuente: Elaboración propia.

Ahora se puede ver que solamente existe una unidad en el modelo, pero seguimos sin poder resolver ninguna interrogación. Sin embargo, ahora se puede hacer uso del dato que se ha ignorado hasta ahora: por la mañana vendió 200 tartas más que por la tarde. Esto se puede modelizar extrayendo un modelo de comparación a partir del modelo anterior. Esta representación se muestra en la Figura 105.

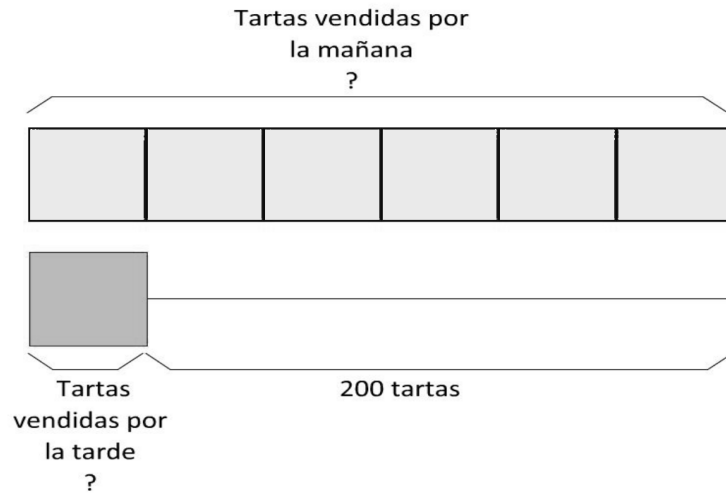


Figura 105: El problema de los pasteles. Paso 3.

Fuente: Elaboración propia.

Con la técnica de eliminación de bloques iguales, se calcula inmediatamente que una unidad es una quinta parte de 200:

$$1 \text{ unidad de tartas} = 200 \text{ tartas} \div 5 = 40 \text{ tartas.}$$

Según el modelo de la Figura 105, la pastelera hizo 10 unidades de tartas, de modo que el total de tartas es $10 \times 40 = 400$. Luego Amelia hizo en principio 400 tartas.

12.2.1.1.5.3. Reordenación de bloques

En ocasiones, la cantidad que queremos calcular está repartida en diferentes bloques a lo largo del modelo utilizado. En esas situaciones es conveniente reorganizar los bloques, normalmente por unidades, con el objetivo de que se vean mejor aquellos bloques cuyo valor debemos calcular. Tomemos el siguiente problema como ejemplo:

“La edad de Adrián es una cuarta parte de la edad de su padre, Bienvenido. Dentro de 5 años, Adrián tendrá un tercio de la edad de su padre. ¿Qué edad tiene Adrián ahora?”

Este problema es un buen ejemplo del uso del modelo Antes-Después, puesto que relaciona cantidades en dos situaciones distintas. En general, como es lógico, los problemas de edades son muy proclives a ser resueltos mediante el uso de este modelo. Por tanto, así lo representamos en la Figura 106.

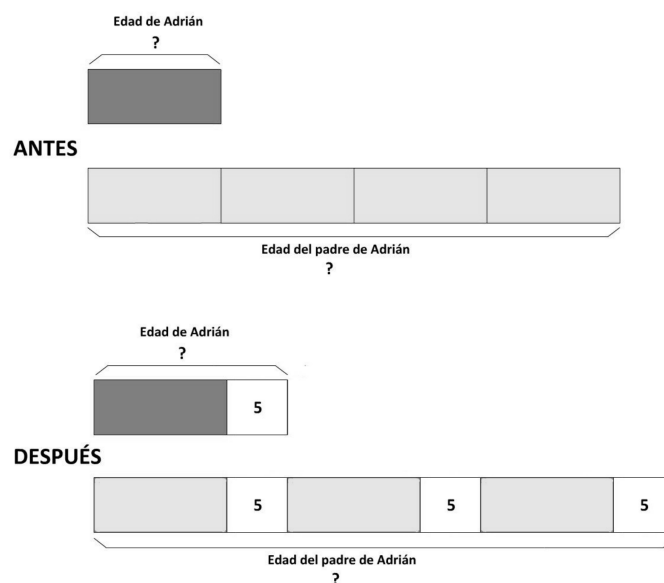


Figura 106: El problema de las edades. Paso 1.

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede ver, “antes” la edad de Adrián es la unidad, y coincide con una cuarta parte de la longitud de la barra de su padre. “Después”, Adrián ha envejecido 5 años y su edad cubre ahora un tercio de la edad de su padre, luego la edad de su padre es tres veces la nueva edad de Adrián.

Ahora bien, como el padre de Adrián también ha envejecido 5 años, podemos utilizar su barra “antes”, añadiéndole una barra de 5 años y utilizar el modelo de comparación con la barra “después”, como se ve en la Figura 107.

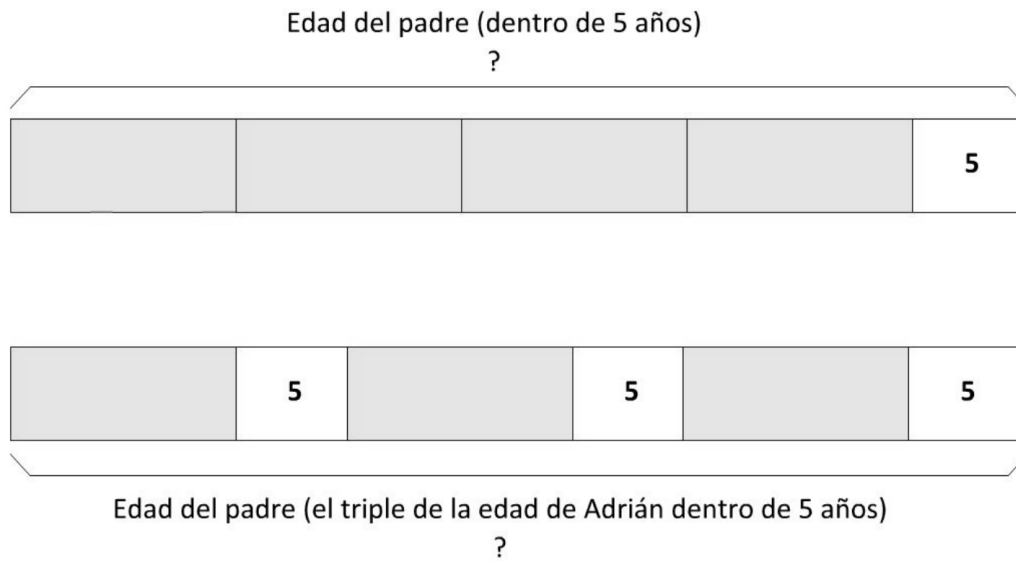


Figura 107: El problema de las edades. Paso 2.

Fuente: Elaboración propia.

Dispuestas así las unidades, no se ve suficientemente bien cómo calcular la longitud de la unidad. Sin embargo, reorganizando las barras por unidades, la situación queda modelizada según la Figura 108:

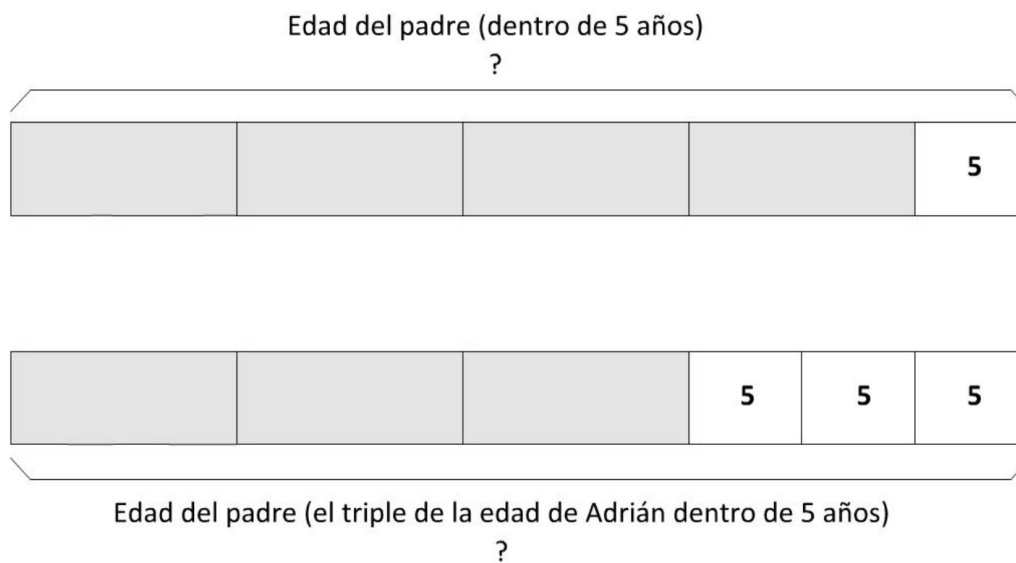


Figura 108: El problema de las edades. Paso 3.

Fuente: Elaboración propia.

Ahora sí se aprecia claramente que la unidad equivale a la mitad de la barra unidad. De aquí se desprende que la barra unidad tiene un valor de $5+5=10$ años, que es la edad de Andrés ahora.

Este ejercicio es un nuevo ejemplo de la dificultad de la que hablábamos antes y que pone de manifiesto Cheong (2002), de quien se ha tomado el ejemplo, y es que solamente después de haber resuelto el ejercicio se puede saber que efectivamente la barra unidad es exactamente el doble de 5. Es altamente improbable que un estudiante dibuje las barras con las proporciones adecuadas, puesto que no conoce el resultado. Así, lo normal es que represente un modelo como el que mostramos en la Figura 109.

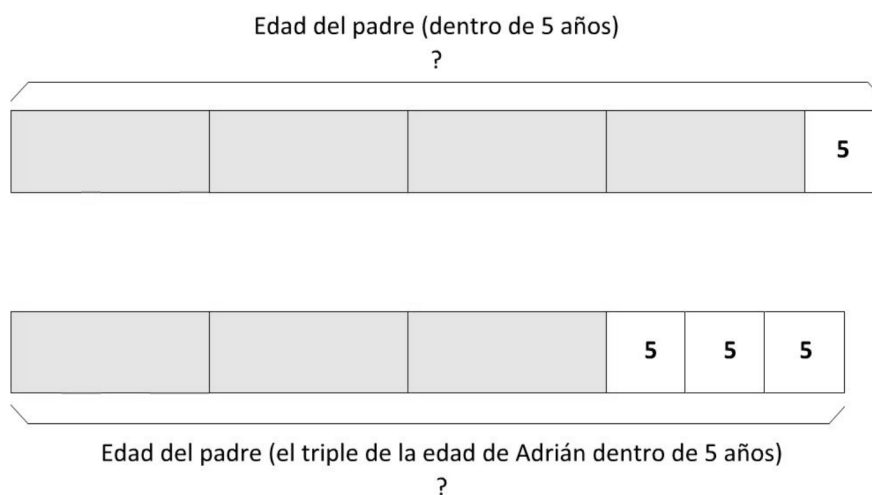


Figura 109: El problema de las edades. Representación realista.

Fuente: Elaboración propia.

No es evidente, según el modelo anterior, que la barra unidad sea el doble de las barras de 5 años. De hecho, la longitud de las barras superior e inferior ni siquiera coinciden, aunque son la misma cantidad. La recomendación de Cheong es acostumbrar a los alumnos a que se enfrenten a esta situación, desconfíen de las proporciones aparentes que se desprenden del modelo, pues pueden ser erróneas, y apliquen otras técnicas lógicas para resolver el problema. Por estética y porque los autores de los libros ya conocen los resultados y recrean los modelos a posteriori, los libros no suelen plasmar este problema y muestran barras imposiblemente correctas, pero el profesor debe ser consciente de este tipo de dificultades y mostrárselas a los alumnos.

12.2.1.1.5.4. Suma de cantidades iguales para hallar un resto

La última de las técnicas generales que se repasarán en este capítulo es útil especialmente cuando es difícil aplicar la anterior, es decir, cuando reducir a un bloque unidad es problemático debido a los números involucrados. Consiste en sumar grupos de bloques de distintas unidades (cuyo valor se conoce) para poder calcular el valor

de un subgrupo. Una vez conocido éste, utilizando la técnica de eliminar bloques iguales se calcula el valor de una unidad.

Es obvio que esta técnica no es tan ampliamente utilizable como otras, pues las condiciones necesarias para que su uso sea aconsejable son más estrictas que otras técnicas, ya sean básicas o no. Sin embargo, es un ejemplo de técnica elaborada cuyo conocimiento y dominio puede abrir la puerta al desarrollo y uso de otras técnicas avanzadas. Para la puesta en práctica de esta técnica utilizaremos el siguiente problema:

“34 individuos de un conjunto de 88 estudiantes llevan gafas. $\frac{1}{3}$ del total de los chicos y $\frac{3}{7}$ del de las chicas usan gafas. ¿Cuántas chicas llevan gafas?”

Dado que conocemos el total y éste está dividido en partes, el uso del modelo Todo-Parte parece apropiado. Su representación gráfica se puede ver en la Figura 110.

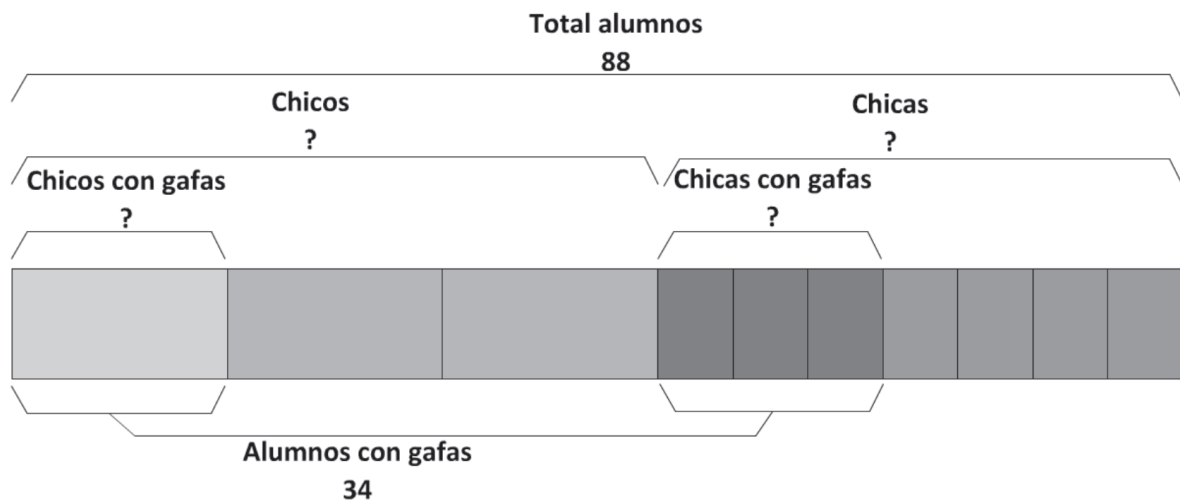


Figura 110: El problema de los alumnos con gafas. Paso 1.

Fuente: Elaboración propia.

En primer lugar, reducir a una única unidad es posible y quizá ayude a resolver el problema con mucha rapidez. Sin embargo, esa unidad común es un veintiuno de la longitud del total de alumnos, lo cual puede ser complicado de dibujar; las unidades de los chicos habrían de dividirse en siete partes cada una, y la de las chicas en tres partes cada una, y además todas estas unidades deben ser idénticas. Lógicamente habría que hacer un modelo nuevo.

Si no queremos, por considerarlo poco práctico, utilizar esa técnica, lo primero que conviene hacer es reordenar las unidades para reunir los alumnos de los que tenemos datos, que son los alumnos con gafas. Pero más allá de eso, el alumno debe darse cuenta de que existe otro grupo igual de numeroso que el de alumnos con gafas, de modo que conocemos la longitud de otro fragmento del total. Este proceso queda plasmado en la Figura 111.

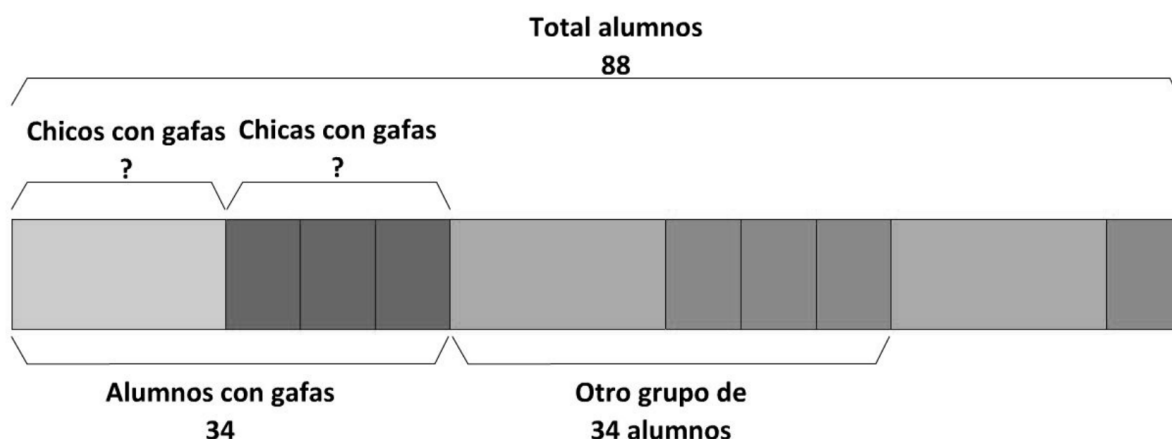


Figura 111: El problema de los alumnos con gafas. Paso 2.
Fuente: Elaboración propia.

Aplicando la técnica básica del modelo Todo-Parte, se concluye que una unidad de chicos más una unidad de chicas es igual a $88 - 34 - 34 = 20$ alumnos.

Sabiendo esto, podemos aplicar el modelo de comparación al bloque formado por una unidad de cada y el bloque de alumnos con gafas (Figura 112).

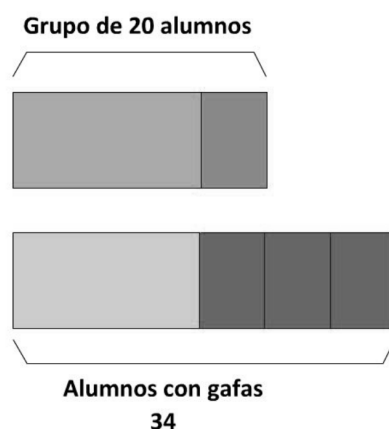


Figura 112: El problema de los alumnos con gafas. Paso 3.
Fuente: Elaboración propia.

Ahora, por comparación, dos unidades de chicas es igual a $34 - 20 = 14$. Por lo tanto, una unidad de chicas es igual a $14 \div 2 = 7$. Como el conjunto de chicas que lleva gafas está formado por 3 unidades, concluimos que:

$7 \times 3 = 21$. Luego 21 chicas llevan gafas.

A modo de revisión, destaquemos dos detalles interesantes sobre este problema.

El primero es que el número de chicos se puede calcular a partir del valor de la unidad de chicas, y éste sería 13. Es obvio que la barra unidad de los chicos, tal y como ha sido representada para este artículo, es mucho mayor que el doble de la barra unidad de las chicas. De hecho, haber acertado exactamente con la proporción adecuada habría sido realmente imposible debido a los números involucrados. Y sin embargo esa circunstancia no ha impedido, y de hecho ni siquiera dificultado, la obtención de la respuesta correcta.

El segundo es que la técnica empleada, la de la eliminación de grupos de tamaño conocido para hallar el resto, no solamente es aplicable a una cantidad relativamente reducida de modelos de problema, sino que además su aplicación también depende de los datos suministrados. Si el enunciado hubiera indicado que son $2/3$ de los chicos los que llevan gafas, el problema no se podría haber resuelto de esta forma, pues no existiría más de un grupo de alumnos con gafas y además no podríamos eliminar grupos. Esto es así puesto que tendríamos por un lado alumnos con gafas (2 unidades de chicos y 3 de chicas) y por otro alumnos sin gafas (1 unidad de chicos y 4 de chicas), de modo que no se podría restar ningún conjunto al otro sin dar una cantidad negativa de unidades de uno u otro tipo. En este caso, quedaría poca alternativa a la reducción a la unidad común.

Como hemos podido comprobar, la simplicidad del método, unida a su extrapolabilidad, hacen del modelo de barras una importante contribución a la educación en Matemáticas. Como menciona Beckmann (2004):

The TIMSS 8th grade assesment shows that 8th graders in Singapore are effective problem solvers and are much better problem solvers than U.S. 8th graders. Although cultural factors probably also affect the strong mathematics performance of children in Singapore, children in the U.S. could probably strengthen their problem-solving abilities by learning Singapore's methods and by being exposed to more challenging and linguistically complex story problems early in their mathematics education. (p. 46)

De hecho, cuando habla de “los métodos de Singapur” se refiere especialmente al modelo de barras.

12.2.2. Contenidos del currículo de Matemáticas de Singapur que no existen en el currículo de Matemáticas de España.

En el currículo de Matemáticas de Singapur se halla un listado de todos los conceptos que deben impartirse en el curso, así como de los que no deben impartirse. Algunos de ellos no existen en el currículo de Matemáticas de España. Éstos son:

- Velocidad y velocidad media. Los capítulos sobre este concepto contienen problemas de todo tipo sobre la velocidad y la velocidad media, algunos de ellos de hasta tres pasos.
- Desarrollos planos de poliedros. En estos capítulos se estudian los desarrollos planos de cubos, ortoedros y pirámides, sus diferentes posibilidades, reconocimiento del poliedro resultante a partir del desarrollo plano y comprobación de la corrección de un determinado desarrollo. Probablemente el objetivo sea la estimulación de la visión espacial del alumno. En España, en muy pocas ocasiones (a lo sumo un ejercicio en todo el libro), se pide al alumno identificar el nombre del poliedro al que corresponde un determinado desarrollo plano.
- Cálculo de ángulos en figuras geométricas compuestas. En los ejercicios sobre este concepto, el alumno debe saber deducir la medida de un determinado ángulo de una figura. Como datos tiene la propia figura y datos sobre lados paralelos, perpendiculares y con la misma longitud, y normalmente además se conoce la medida de otro de los ángulos de la figura. Este tipo de ejercicios estimulan el desarrollo lógico del alumno.
- Razón. En los capítulos dedicados a este concepto se enseña la razón de dos o más magnitudes con la notación $a:b$ (para dos magnitudes) o $a:b:c$ (para tres magnitudes). Manteniendo un fondo conceptual común, ambas (razón y proporcionalidad) se presentan al alumno de formas distintas. Además, la razón admite varias magnitudes y es muy susceptible de proponer problemas resolubles mediante el modelo de barras. En España, por el contrario, solamente se estudia la proporción.

- Números mixtos. A lo largo del curso, los libros de Singapur hacen uso frecuente del número mixto, en lugar de las fracciones impropias, para representar los resultados de problemas con fracciones. En España, en cambio, con la entrada en vigor de la LOMCE, la escasa atención que se prestaba a los números mixtos en los libros de la Comunidad de Madrid ha desaparecido completamente, llegándose a situaciones en las que se hacen afirmaciones similares a “en ese tiempo se tejen $13/7$ de jersey”. Este tipo de afirmaciones carecen de sentido, pues las personas no pensamos en esos términos. Nuestra forma de pensar, de hecho, se basa en el número mixto: “en ese tiempo se tejen 1 jersey y $6/7$ de otro” equivale, en números mixtos” a “en ese tiempo se tejen $1 \frac{6}{7}$ jerseys”.

12.2.3. Contenidos del currículo de Matemáticas de España que no existen en el currículo de Matemáticas de Singapur

Existen ciertos contenidos cuya finalidad básica, en un nivel como 6.º curso de Educación Primaria, es la de hacer operaciones con ciertos conceptos matemáticos, pero cuya aplicación directa en la resolución de problemas es muy forzada. Esto afecta a la forma en que se presenta a los alumnos la matemática como un todo, pues representan parcelas aisladas de conocimiento matemático. Quizás por esta razón no se encuentran en los libros de texto de Singapur analizados, si bien sí forman parte del currículo español.

Como ejemplos de estos contenidos podemos encontrar los siguientes:

- Las potencias, que reciben una importante atención (un capítulo entero) en los libros de la Comunidad de Madrid y sin embargo en Singapur solamente se imparten de forma transversal para representar el área del cuadrado y el volumen del cubo.
- Las coordenadas cartesianas. Es un nuevo ejemplo de contenido que, una vez impartido, no se volverá a utilizar en todo el curso. Su falta de conexión con el resto de contenidos del libro convierten a las coordenadas cartesianas en un serio candidato al olvido por parte de los alumnos.
- Las operaciones con ángulos. Los libros de la Comunidad de Madrid correspondientes a la LOE consultados, siguiendo las instrucciones de la Comunidad de Madrid, dedicaban al menos un apartado a los cálculos con

ángulos en forma compleja. Tras la llegada de la LOMCE, solamente uno de los libros ha mantenido un capítulo dedicado a los ángulos. En el resto de libros solamente se incluye un apartado dentro del tema de unidades de medida. Aunque este contenido en concreto es útil para la elaboración de diagramas de sectores, a lo cual se presta mucha atención en los libros de Singapur, el enfoque dado a este particular no es tanto enseñar al alumno a construirlos como a interpretarlos, por lo que los cálculos con ángulos no son necesarios.

Se puede argüir, recíprocamente, que existen contenidos también aislados del resto del curso en Singapur, por ejemplo los desarrollos de poliedros que vimos en el anterior apartado. A este tema se dedica un tema entero en todos los libros de Singapur, no siendo directamente útil para ninguna otra. Es probable que la inclusión de este tema obedezca a la preparación de los alumnos para la manipulación espacial y la construcción de cuerpos geométricos con sus propias manos (Chan, 2009).

12.2.4. Imprecisiones conceptuales y gráficas

12.2.4.1. *Peso y masa*

En los libros más utilizados de la Comunidad de Madrid, tanto los adecuados a la LOE como a la LOMCE, hablan de objetos que “pesan x kilogramos”. Éste no es un defecto exclusivo de los libros, pues en el propio currículo de la LOMCE (Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero) se encuentra, como criterio de evaluación, “Seleccionar, instrumentos y unidades de medida usuales, haciendo previamente estimaciones y expresando con precisión medidas de longitud, superficie, **peso/masa**, capacidad y tiempo, en contextos reales.” (p. 19391; énfasis propio). Esta expresión fomenta la idea errónea de que el peso y la masa son la misma magnitud. Asimismo, en la concreción curricular de la Comunidad de Madrid (Decreto 89/2014, de 24 de julio) se hace repetidamente referencia al kilogramo como unidad para medir el peso, lo cual es incorrecto.

Pero no solamente se ha constatado esa confusión errónea en los cuatro libros a que hacemos referencia. En un estudio sobre este particular en 91 libros de Educación Primaria y 35 de Secundaria (Vílchez González, López Serrano, Reyes Camacho y Carrillo-Rosúa, 2010) se observa cómo la mitad de los libros de Matemáticas de Educación Primaria confunde masa con peso cuando se habla de ella.

Aunque podrían hacer igual que en España, absolutamente todos los problemas de Singapur relacionados con la masa mencionan la palabra “masa” (*mass*) en lugar de la palabra “peso” (*weight*). No solamente es una forma de utilizar el lenguaje con propiedad, sino que evita los consabidos problemas que los profesores de Física y Química encuentran en Secundaria para hacer entender a los alumnos que ambos conceptos, peso y masa, son diferentes y, lo que es peor, que muchas veces han utilizado la palabra “peso” de forma incorrecta para referirse a la masa (ver, por ejemplo, Franco Mariscal, 2005).

12.2.4.2. Representación de figuras geométricas

Esto mismo aplica a los dibujos geométricos. En las ocasiones en las que los libros de la Comunidad de Madrid revisados piden a los alumnos calcular el área de un polígono o figura compuesta, nunca se indica explícitamente qué lados son paralelos entre sí o qué lados tienen la misma longitud. Frecuentemente ni siquiera se señalan los ángulos que son rectos. Esto puede dar lugar a confusión por imperfecciones en el propio dibujo o en la interpretación que los alumnos hacen de éste. Por el contrario, los libros de Singapur hacen uso de la notación propia del dibujo técnico para explicitar los lados que son paralelos y los que tienen la misma longitud, lo que elimina confusiones y ambigüedades. Además, los datos sobre paralelismo, perpendicularidad o igualdad de longitud, no solo son proporcionados a través de los dibujos, sino que aparecen siempre explicitados en los enunciados.

12.2.5. Dificultad

Aunque pueda ser una idea obvia, parece claro que si los alumnos de Singapur realizan mejor que otros los ejercicios de las pruebas PISA y TIMSS, podemos presuponer que esos ejercicios les resultan, de promedio, más fáciles que al resto de los participantes. Por tanto, se deduce que el nivel de conocimientos matemáticos en la competencia que implica la resolución de los problemas que se les plantean es más alto. Esto se pone de manifiesto de varias formas. Prueba de ello es la existencia en los libros de texto analizados de contenidos matemáticos, y sobre todo procedimientos, abordados en mayor profundidad que los incluidos en el currículo español (tanto para LOE como para LOMCE).

12.2.5.1. Ejercicios multipaso

En los libros de Matemáticas de Singapur analizados es algo bastante común encontrar ejercicios que requieren dos o más pasos para su resolución. Por ejemplo:

“Un ciclista ha recorrido los 27 km que separan las ciudades C_1 y C_2 . Los primeros dos tercios de hora del viaje los recorrió a 9 km/h de velocidad media, e hizo un descanso. Una vez se puso en marcha de nuevo, completó el viaje en $2\frac{1}{2}$ h. ¿Cuál fue la velocidad media del ciclista en la segunda parte del viaje?”

Y esto, a diferencia de lo que sucede en los libros españoles consultados, en los que el uso de este nivel de ejercicios es menor, no solamente está relegado a los ejercicios de final de capítulo o a los ejercicios de ampliación, sino que se distribuyen a lo largo de todo el libro.

12.2.5.2. Ejercicios de mayor dificultad

Es una tarea compleja calcular una dificultad media de los ejercicios de forma objetiva (podría ser interesante el desarrollo de una técnica para ello). No obstante, tras una observación minuciosa de los ejercicios contenidos en los libros analizados de Singapur y de España para valorar la complejidad en la resolución que implican los ejercicios, hemos comprobado que ésta parece más alta en los libros de Singapur que en los libros españoles consultados.

Por ejemplo, en uno de los libros de texto de una editorial de referencia en España, ajustado a la nueva ley LOMCE, encontramos al final del capítulo el apartado “Retos matemáticos”, en el que aparece un problema similar al siguiente:

“Adela ha comprado unas gafas de sol con un estuche. Ambos objetos han costado 25€ en total. Si el estuche costó 5€ menos que las gafas, ¿cuánto costó cada objeto?”

El hecho de que el ejercicio esté relegado en una sección al final del capítulo, en la última parte de la página, y con el título “Retos matemáticos”, significa que se trata de un ejercicio con una dificultad superior a la del resto del tema y que no es tanto un ejercicio estándar como un ejercicio de ampliación. De hecho, este tipo de ejercicios se resuelven en Singapur de manera ordinaria antes de llegar a 6.º curso de Educación Primaria, gracias a su conocimiento del Modelo de Barras (del que ya hemos hablado).

Por su parte, el primer ejercicio que está señalado como de dificultad alta (los ejercicios de mayor dificultad disponen de una señal particular que los identifica como tales) que encontramos en uno de los libros de Singapur en un capítulo dedicado a la aritmética dice lo siguiente:

“Los 26 niños que participan en un campamento deciden hacer una corona de flores a su monitora. Para ello, cada niña recoge 5 flores y cada niño recoge 3. Las niñas, en total, recogieron 18 flores más que los niños. ¿Cuántas niñas había en el campamento?”

El ejercicio del libro de Singapur es mucho más complejo que el ejercicio de ampliación del libro español. Este ejemplo pone de manifiesto que lo que los libros de Singapur consideran de dificultad alta está muy por encima del mismo umbral en los libros de texto españoles.

12.2.5.3. Ejercicios con planteamientos diferentes

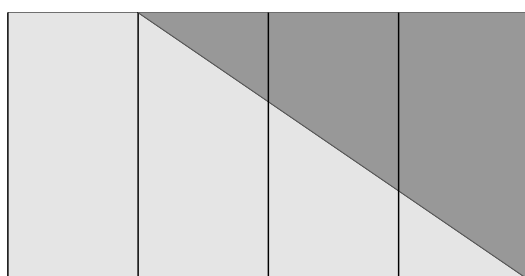
Adicionalmente, existen ejercicios en los libros de texto de Singapur analizados que están planteados de una forma que no se utiliza en los libros españoles consultados, pero que en los libros de texto de Singapur son muy comunes. Destacaremos tres ejercicios tipo:

- Resolución de ángulos. Como ya hemos visto, en el currículo de Matemáticas de Singapur se incluye el cálculo de ángulos desconocidos en figuras geométricas compuestas. Estos ángulos se calculan razonando a partir de premisas tales como que la suma de los ángulos de un triángulo son 180° o que los ángulos opuestos en una intersección de segmentos son iguales. En definitiva, a partir de unos datos iniciales y una serie de teoremas, el

alumno debe ir deduciendo el valor de varios ángulos intermedios en la figura hasta llegar al ángulo pedido. Es un proceso de deducción en varias etapas que no existe en los libros españoles.

- Razonamiento geométrico de porcentajes o fracciones. Consisten estos ejercicios en una figura geométrica (generalmente un rectángulo) dividida en partes y parte de la figura está sombreada. El alumno debe calcular qué fracción o qué porcentaje de la figura está sombreada. A continuación reproducimos uno de los ejemplos más sencillos:

“¿Qué fracción de la figura está sombreada?”



Estos ejercicios nuevamente requieren el razonamiento del alumno para resolverlos, más allá de interpretar los datos que se ofrece en un enunciado para después operar. De hecho, requieren que el alumno realice el salto entre lo pictórico y lo abstracto.

- Cálculo de un elemento de una muestra dada la media. Mientras que lo común en España es calcular medias a partir de una muestra, en Singapur prácticamente todos los ejercicios que involucran la media aritmética en 6.º curso de Educación Primaria son del siguiente tipo:

“El tiempo medio tardado por 9 alumnos en recorrer una distancia a la carrera ha sido 13,7s. Cuando un nuevo alumno hace su marca, el tiempo medio pasa a ser 13,75s. ¿Cuánto tiempo ha tardado el nuevo alumno en hacer su recorrido?”

Este ejercicio, a diferencia de los problemas clásicos en los que se pide el cálculo de la media a partir de los valores de la muestra, requiere un conocimiento profundo de lo que la media significa: el alumno no necesita conocer las medidas de la muestra, pues puede suponer sin pérdida de generalidad que todas las medidas son iguales que la media. Las operaciones que se habrán de plantear para resolver el ejercicio pueden ser las siguientes: si la media era 13,7s, podemos suponer que los 9 alumnos tardaron exactamente 13,7s. Si al llegar el alumno nuevo el grupo funciona

como si los diez hubiesen tardado 0,05s más, entonces el nuevo alumno es el que ha introducido esas diez veces 0,05s. Como $10 \times 0,05s = 0,5s$, entonces el nuevo alumno ha tardado 0,5s más que la media anterior. Por tanto, el nuevo alumno tardó $13,7s + 0,5s = 14,2s$.

Aun ignorando la razón por la que las editoriales de Singapur optan por estos ejercicios (que, además, no pertenecen al currículo de 6.º curso de Educación Primaria, sino que aparecen como repaso de cursos anteriores), con ellos estamos ante un punto de vista diferente de la media aritmética, por lo menos desde el punto de vista español. Destaquemos, una vez más, que los alumnos no utilizan ecuaciones para resolver estos problemas, puesto que es un contenido propio de Educación Secundaria y aún no lo conocen.

Solamente en uno de los libros editados para la LOMCE hemos encontrado un ejercicio de corte similar al del ejercicio antes descrito, pero la muestra del enunciado consta únicamente de dos elementos, lo que reduce enormemente la dificultad del ejercicio.

12.2.6. Conceptos teóricos

Destaca fuertemente que, frente al protagonismo que tienen las definiciones en los libros de España, en Singapur se utilizan muy poco. El currículo está diseñado para enseñar menos nomenclatura y más procedimientos (que no algoritmia, sobre la cual se instruye sumamente poco). Por lo tanto, existen muchas menos secciones teóricas que en los libros españoles (esto se puso de manifiesto en los resultados): mientras que en los libros de Singapur no llegan al 10% de las unidades de análisis, en los de España roza el 19% (en los libros adecuados a la LOE). Trabajar con un libro de texto así requiere un planteamiento por parte del profesor muy distinto al que se acostumbra todavía a aplicar en España, y una elevada cualificación del profesorado.

Además, en los libros de Singapur en muchas ocasiones se muestran los objetos y se indica su nombre sin definir sus características explícitamente. Ejemplo de ello es el capítulo dedicado a los cuerpos geométricos. Los alumnos deben saber reconocer los cuerpos geométricos más comunes: cubo, ortoedro (en inglés “cuboid”), cilindro y pirámide. Pero como contenido teórico solamente se muestran ejemplos y se indica el nombre que reciben, no se incluyen explícitamente en el texto cuáles son las características que los definen como tales.

Este tipo de definiciones se denominan ostensivas. En investigación sobre educación matemática existe una importante conciencia sobre la existencia de este tipo de definiciones (Edwards y Ward, 2004; Font, Godino y D'Amore, 2007) y también de sus peligros (Detzel y Ruiz, 2008; Godino, Willhelmi y Bencomo, 2005), los cuales aparecen especialmente en forma de distractores (Vinner y Hershkowitz, 1983). No obstante, los libros de Singapur las utilizan mucho más que los libros españoles. ¿Por qué? ¿Cómo utilizan tales definiciones los profesores? ¿Cómo evitan los riesgos que estas definiciones entrañan? Seguramente su formación contempla este aspecto.

Por último, es interesante hacer notar que en los libros de texto estudiados siempre se intenta vincular los contenidos matemáticos con el contexto real. Por ejemplo, el contenido relacionado con la raíz cuadrada no forma parte de un capítulo dedicado a la aritmética, como en España, sino a la medida. Se enseña qué es la raíz cuadrada (y cúbica) cuando es necesaria para calcular el lado de un cuadrado (y la arista de un cubo), y no antes.

12.2.7. Currículo en espiral

La confección del currículo español tiene una de sus bases en el currículo en espiral. Este concepto, ideado por Jerome S. Bruner (1972), consiste en que el alumno debe pasar sucesivamente por los mismos conceptos en las sucesivas etapas, pero cubriéndolos más en profundidad a medida que va avanzando en ellas (Guilar, 2009).

Aunque el currículo de Singapur se basa también en esta idea, en ambos países se entiende de distinta forma. En Singapur los conceptos se vuelven a visitar en cada curso, introduciendo mayor profundidad, nuevas operaciones, etc, pero sin repetir nuevamente lo visto en cursos anteriores (salvo excepcionales secciones de recordatorio). Por ejemplo, el currículo establece que el alumno debe saber multiplicar fracciones propias por números naturales y por otras fracciones propias. Eso no significa (y de hecho no sucede) que el libro tenga que volver a explicar qué es una fracción, qué son fracciones equivalentes, cómo simplificar una fracción o cómo sumar fracciones.

Esta ausencia de reiteración en los libros de Singapur permite, además, aligerar el currículo y practicar en profundidad cada concepto, haciendo problemas muy variados, de diferentes niveles de complejidad (uno o varios pasos), en los que se piden cosas diversas. Por ejemplo, es representativo el caso del contenido destinado al volumen de ortoedros, en cuyo capítulo existen muchos problemas de recipientes con forma de ortoedro en los que se pide calcular el área de la base, la altura que alcanza el agua tras un proceso de llenado o de vaciado con agua, la distancia del nivel del agua hasta el borde, la altura del contenedor, el tiempo que tardará en llenarse si el agua cae a determinada velocidad, la altura que alcanzará el agua un tiempo después de empezar a llenarse, y un largo etcétera.

Los libros españoles analizados, en cambio, no siempre lo entienden así. Añaden la parte novedosa que estipula el currículo, pero parten prácticamente de cero. Por ejemplo, las fórmulas para calcular el área de triángulo, rectángulo, paralelogramo, rombo y trapecio se arrastran desde 4.º y 5.º cursos de Educación Primaria, pero en 6.º curso los libros vuelven a incluirlas para su uso en el cálculo de áreas de figuras compuestas (que es el contenido novedoso del curso). No obstante, en ocasiones esta responsabilidad no recae en las editoriales, sino en el propio currículo. El concepto de centro, radio, diámetro y cuerda de un círculo aparecen explícitamente en los currículos de todos los cursos de Educación Primaria a partir de 3.º curso. Como último ejemplo, podemos tomar las tablas de frecuencias (del bloque de probabilidad y estadística), que entre 5.º y 6.º cursos no sufren modificación alguna, simplemente se repiten.

Ante esta situación surge la siguiente pregunta: ¿se ve afectado el alumno por la forma en la que el currículo en espiral de Bruner (1972) se implementa en los libros de texto que utiliza?

12.2.8. Adherencia al currículo

En España los libros de Matemáticas de Educación Primaria estudiados siguen el currículo como una lista de contenidos mínimos, algunos de los cuales están contenidos de forma poco explícita. En Singapur, por el contrario, los libros homólogos siguen el currículo con mucha mayor fidelidad.

Por supuesto, los libros de Singapur están obligados a someterse absolutamente al currículo, puesto que el Ministerio de Educación revisa sus contenidos a priori. De no seguir el currículo, no serían aprobados.

Por otro lado, la libertad de que gozan los libros españoles, pues no están sujetos a revisión a priori por parte del Estado, les permite reinterpretar hasta cierto punto los dictados del currículo y, en muchas ocasiones, ampliarlos arbitrariamente. Por ejemplo, aunque en ningún momento los sólidos platónicos figuran explícitamente en el currículo, los libros de las cuatro editoriales más representativas analizados los explican, tanto en los libros de la LOE como de la LOMCE. O bien, el currículo solamente incluye el cálculo del área del triángulo y del paralelogramo (esto es así en el de la LOMCE), pero los libros también incluyen trapecios, rombos (que también son paralelogramos) y polígonos regulares. Una posible explicación a este hecho quizás se encuentre en la búsqueda de prestigio por parte de las editoriales, la cual se podría alcanzar a través de la ampliación de los temarios.

No siempre esta ampliación ha sido una decisión arbitraria. Por contra, el currículo de Matemáticas de la Comunidad de Madrid para la LOE (Decreto 22/2007, de 10 de mayo) ni siquiera divide los contenidos por cursos, sino por ciclos (primero, segundo y tercero), dejando a las editoriales la tarea de repartir todos los contenidos entre los dos cursos de cada ciclo. En la concreción curricular de la misma comunidad para la LOMCE (Decreto 89/2014, de 24 de julio), sin embargo, ya se dividen todos los contenidos por cursos y los elementos de que consta están definidos con mucho más rigor.

A pesar de lo anterior, por lo que sería de esperar una mayor homogeneidad en los libros de Singapur que en los de España, al estar sujetos a mayor restricción por parte del Estado, en el estudio estadístico realizado sobre los libros españoles aparecían características comunes a todos ellos, algo que en Singapur no sucede. La realidad es que los libros españoles parecen estar cortados por un mismo patrón, mientras que los libros de texto de Singapur analizados demuestran haber sido hechos por equipos distintos, cada uno con una visión distinta de lo que pretenden conseguir. Podría decirse que los libros se hacen uno a uno, como obras maestras, en lugar de hacerse en serie.

12.2.9. Contenidos de España y de Singapur

A continuación, y para finalizar el capítulo, haremos un repaso a los contenidos del currículo de 6.º curso de Educación Primaria de Singapur y de la concreción curricular de la Comunidad de Madrid correspondiente a la LOMCE (Decreto 89/2014, de 24 de julio), comparando la forma en que se imparten dichos contenidos en unos libros y otros.

Es interesante comprobar que los libros editados para la LOE cumplen en general con los mínimos establecidos en el currículo de LOMCE de la Comunidad de Madrid. Los cambios implementados en los libros a nivel de contenido son muy pocos. Podemos destacar la disminución de contenidos dedicados a los temas de ángulos y sus operaciones (en tres de los cuatro libros; en el cuarto libro curiosamente se ha decidido hacer el cambio inverso: incluir un tema de ángulos cuando en la edición anterior no existía).

En las tablas que incluimos a continuación (Tablas 101, 102, 103, 104 y 105) exponemos de manera comparativa los contenidos de los currículos de España (representados por los libros analizados de la Comunidad de Madrid) y Singapur y su uso, teniendo en cuenta que en el caso de España la columna que los incluye hace referencia tanto a lo referenciado en la LOE como en la LOMCE, salvo que se indique lo contrario.

Errores matemáticos en libros de texto de Singapur

Tabla 101

Comparación de los contenidos del bloque de Aritmética de los currículos de Singapur y España y de la forma en que los libros los aplican.

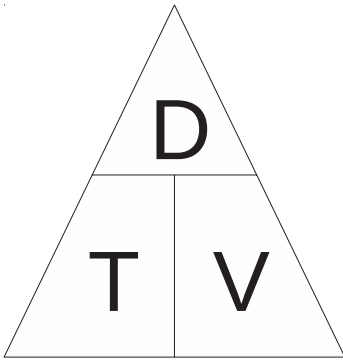
Contenido	Origen	Enfoque
Números naturales. Lectura y escritura de números naturales. Descomposición aditiva y aditivo-multiplicativa. Ordenación y redondeo.	Singapur	Pertencen al 5.º curso. En 6.º curso aparecen ejercicios en las secciones de repaso donde se pide hacer ejercicios de esta índole. No hay recordatorios ni contenidos teóricos.
	España	Se explican estos contenidos por completo, aunque algunos de ellos ya pertenecen al 5.º curso, como si nunca se hubieran explicado. En algunos casos, en los libros de la LOE, se amplían contenidos, incluyendo sistemas de numeración diferentes al arábigo y al romano (por ejemplo, egipcio y griego). En el currículo de la LOMCE se ubica la numeración romana en 5.º curso, pero hay un libro que la incluye en 6.º curso.
Números enteros negativos. Representación en la recta real. Operaciones.	Singapur	Se introducen en 1.º curso de Educación Secundaria.
	España	Se introducen con los ejemplos usuales: pisos en un edificio, temperatura, altitud y profundidad, etc.
Fracciones.	Singapur	Solamente se incluye la división de fracciones propias o números naturales por fracciones propias. Se explica con el contexto real: dividir a entre b/c equivale a preguntarse cuántos b/c hay en a . Se realiza la división entre una fracción como el producto de la fracción inversa. Solamente en uno de los libros se recuerda cómo sumar fracciones con denominadores iguales o múltiplos uno de otro. No se vuelve a introducir el concepto de fracción.
	España	En los libros LOE: Se explica el concepto de fracción, aunque ya está en los libros desde 3.º curso de Educación Primaria. Se vuelve a explicar la amplificación, simplificación, concepto de fracciones equivalentes y reducción a común denominador, contenidos que pertenecen a 5.º curso. Tres de los libros dedican un capítulo a estos conceptos y otro a las operaciones con fracciones. En los libros LOMCE: En tres de los libros se dedica una página a recordar el concepto de fracción y las operaciones de amplificación y simplificación. En el cuarto libro, se revisa por completo el concepto. En ambos: El cálculo de la fracción de una cantidad contiene pocos ejemplos, no se le da un sentido real. Aunque el currículo solamente exige la suma de fracciones con el mismo denominador, todos los libros contienen la suma de fracciones de distinto denominador. La división de fracciones se enseña mediante la multiplicación en cruz. Aunque uno de los libros muestra que la división es la multiplicación por el inverso, insiste en resolver la operación multiplicando en cruz.

Contenido	Origen	Enfoque
Porcentaje.	Singapur	<p>Solamente en uno de los libros se recuerda la equivalencia entre las formas porcentual, decimal y fraccionaria de expresar un porcentaje. En el resto de los casos se da por supuesto. Nunca se define el porcentaje, ni siquiera como recordatorio.</p> <p>En todos los casos el tema se basa en problemas, haciendo uso de dos estrategias fundamentales:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Modelo de barras. 2. Reducción a la unidad. <p>Se incluye cálculo del total a partir del parcial y del porcentaje y cálculo de aumentos y disminuciones porcentuales.</p> <p>Con mucha frecuencia se pide al alumno que aplique el redondeo del resultado.</p>
	España	<p>En los libros LOE: En tres de los libros LOE se vuelve a repetir el concepto de porcentaje, sus formas fraccionaria y decimal, y el cálculo del porcentaje de una cantidad.</p> <p>Solamente en dos de los libros se enseñan los aumentos y disminuciones porcentuales.</p> <p>En los libros LOMCE: En tres de los libros se encuentra un recordatorio sobre el concepto de porcentaje. En el cuarto, es un contenido que forma parte del tema.</p> <p>Se hacen aumentos y disminuciones porcentuales, como dicta el currículo.</p> <p>En dos de los libros se incluye en este tema, además, el concepto de escala en un mapa.</p> <p>En ambos: En todos los libros, este tema siempre se da en el mismo capítulo que la proporcionalidad (ver el concepto Razón).</p>
Razón (ratio) y proporción.	Singapur	<p>Se instruye sobre magnitudes que mantienen la misma razón con la nomenclatura a:b.</p> <p>Se incluye la razón triple, a:b:c.</p> <p>Se hace uso intensivo del modelo de barras, en su forma de comparación.</p> <p>Incluye la dualidad razón-fracción: si las magnitudes A y B están en proporción a:b, entonces por cada unidad de A tenemos a/b unidades de B.</p> <p>La razón, tal y como se ve en Singapur, equivale conceptualmente a la proporcionalidad directa. No se incluye la proporcionalidad inversa, que como tal forma parte de los contenidos de 2.º curso de Secundaria.</p>
	España	<p>La proporción entre dos magnitudes proporcionales se muestra a través de tablas de valores.</p> <p>Se incluyen los conceptos de proporcionalidad directa e inversa, siempre de dos magnitudes.</p> <p>Los problemas se resuelven mediante la reducción a la unidad. En uno de los libros LOMCE, contraviniendo al currículo, no se enseña ni la reducción a la unidad ni la regla de tres. En el resto, como para la regla de tres no se pueden utilizar ecuaciones, se enseña a hacerla mediante multiplicaciones y divisiones pero sin justificar las operaciones.</p>

Contenido	Origen	Enfoque
Potencias y raíces cuadrada y cúbica.	Singapur	Las potencias no forman parte del currículo de 6.º curso de Educación Primaria, sino de 1.º curso de Educación Secundaria. Las raíces cuadrada y cúbica no tienen un capítulo propio, sino que ambos conceptos se ubican en el bloque de Medida, en el capítulo dedicado al volumen de cubos y ortoedros, con el único objetivo de utilizarlas para calcular áreas de cuadrados y aristas de cubos. Sin embargo, se definen ambos conceptos. Para resolver raíces, tanto cuadradas como cúbicas, se indica al alumno que utilice la calculadora cuando el número es grande (por ejemplo, para calcular raíces cuadradas mayores que 100).
	España	En el currículo de la LOMCE no figura la raíz cuadrada como parte del temario. En el currículo de la LOE, en cuanto a potencias, solamente se incluían cuadrados y cubos. En todos libros LOMCE y LOE aparecen las potencias de números naturales, poniendo énfasis en el cálculo. También contienen la descomposición polinómica de números naturales, aunque este concepto no figura en el currículo. Las raíces no se encuentran en el currículo, pero en todos los libros se calculan raíces cuadradas aproximadas de un número por tanteo. No se incluye la raíz cúbica.
Cálculos.	Singapur	Los libros no se enfocan en la resolución de cálculos. Existen muy pocos ejercicios cuyo único objetivo sea resolver una operación, y casi siempre se encuentran en las secciones de repaso. Una excepción a esta norma la tenemos en la raíz cuadrada.
	España	El cálculo mental permea los contenidos a través de ejercicios de estimación a lo largo de los libros. Se presta atención a la automatización de los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división, así como operaciones rápidas con potencias de 10. Se inicia al uso del paréntesis y operaciones combinadas (jerarquía de operaciones).
Divisibilidad. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Reglas de divisibilidad.	Singapur	Se introducen en 1.º curso de Educación Secundaria.
	España	Se enseña el cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo a través del cálculo de la lista de múltiplos y divisores, y búsqueda del mayor o el menor. Las reglas de divisibilidad, según el libro, se amplían incluyendo el 4 y/o el 9.
Números decimales. Ordenación y redondeo. Expresión decimal de una fracción.	Singapur	Pertencen a los cursos 4.º y 5.º de Educación Primaria. Se utilizan en ejercicios de repaso y como datos de ejercicios variados (dinero, velocidad, etc.), pero no forman parte del temario de ningún libro.
	España	Se repiten los contenidos de 5º curso (concepto, ordenación y redondeo), ampliándolos. En uno de los libros de LOMCE no habla de redondeo, sino de aproximación.

Tabla 102

Comparación de los contenidos del bloque de Medida de los currículos de Singapur y España y de la forma en que los libros los aplican.

Contenido	Origen	Enfoque
Velocidad.	Singapur	<p>Incluye los conceptos de velocidad y velocidad media. Como regla mnemotécnica para recordar las relaciones entre distancia, tiempo y velocidad, todos los libros utilizan el mismo triángulo.</p> 
	España	<p>No forma parte del currículo de Matemáticas de ningún curso, en Educación Primaria o Secundaria. La primera vez que se incluye el concepto en algún currículo es en 2.º curso de Secundaria, en la asignatura Física y Química.</p>
Magnitudes y medida.	Singapur	<p>Las unidades se utilizan convenientemente donde corresponde (según el ejercicio), pero no se hacen ejercicios de cambios de unidades, pues esos contenidos pertenecen a 5.º curso. Por consiguiente, no existe un capítulo dedicado a las unidades del Sistema Internacional.</p>
	España	<p>En este tema, compartido por todos los libros, se realizan exclusivamente cambios de unidades de longitud, superficie, masa y capacidad (en uno de los libros, tanto en el grupo de libros LOE como en el de LOMCE, no se trabaja con la masa). En uno de los libros LOE se realizan operaciones con unidades en forma compleja (lo cual figura en su currículo) y se amplía con el uso de unidades informáticas.</p> <p>Las operaciones en forma compleja aparecen en todos los libros LOMCE.</p> <p>Se resuelven problemas que implican el cambio de unidades (al darse los datos en diferentes unidades).</p> <p>Los cambios de unidades en particular ya se trabajan en 5.º curso, luego es un contenido repetido en 6.º curso.</p>

Contenido	Origen	Enfoque
Cálculo de áreas y perímetros.	Singapur	<p>Contiene en un capítulo el área y la circunferencia del círculo, incluyendo sus elementos notables (solamente centro, radio y diámetro), así como de semicírculos y cuadrantes. Es muy notable el hecho de que todos los libros utilizan una simplificación de un método atribuido a Kepler (Turégano Moratalla, 1993), por el que se descompone el círculo en cuasitriángulos, que se disponen en forma de cuasiréctángulo con base igual a $\hat{A} \times r$ y altura igual a r. En un segundo capítulo se calculan áreas y perímetros de figuras compuestas por triángulos, rectángulos y círculos, semicírculos y/o cuadrantes. Las fórmulas para calcular áreas de rectángulos y triángulos se incluyen sólo en algunos casos, y como recordatorio. Para el cálculo del área del triángulo se distinguen dos casos: semiproducto de catetos para los triángulos rectángulos y semiproducto de base y altura para el resto de triángulos. Las figuras compuestas son, en general, bastante complejas. Se utilizan, para los cálculos, dos aproximaciones distintas de \hat{A}: 3,14 y $22/7$. El área del polígono regular no se encuentra en el currículo de ningún curso: se calcula descomponiendo el polígono en triángulos.</p>
	España	<p>Estos conceptos suelen estar repartidos en dos capítulos independientes, uno para figuras circulares y otro para polígonos, aunque no es así en todos los libros. Se estudian de forma independiente las áreas de cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio y de los polígonos regulares, mostrando y razonando las fórmulas correspondientes. Aunque todos los libros contienen estas figuras, el currículo solamente menciona el cálculo de áreas de figuras geométricas sencillas. En cuanto al área del círculo, se calcula considerándolo como un polígono regular de perímetro $2\hat{A}$ y apotema igual al radio. Los elementos del círculo, de acuerdo al currículo, son repetidos en su mayor parte desde 4.º curso, aunque los conceptos centro, radio, diámetro y cuerda se ven por vez primera en 3.º curso.</p>
Volumen del cubo y del ortoedro.	Singapur	<p>Todos los libros tienen un capítulo dedicado en exclusiva a este concepto. En este capítulo se encuentra una gran variedad de problemas de cálculos con contenedores en forma de ortoedro llenos de agua: qué altura alcanza el agua, qué distancia hay hasta el borde superior del contenedor, cuánto tiempo tarda en llenarse/vaciarse dada una velocidad de entrada/salida de agua, etc. Se utiliza y recuerda con frecuencia que un decímetro cúbico equivale a un litro.</p>
	España	<p>El currículo se limita a estipular que el alumno debe saber calcular el volumen de ortoedros realizando las mediciones oportunas. Este contenido supone una pequeña parte del capítulo dedicado a cuerpos geométricos. Normalmente se amplía a volúmenes de pirámides, cilindros, conos y esferas.</p>

Tabla 103

Comparación de los contenidos del bloque de Geometría de los currículos de Singapur y España y de la forma en que los libros los aplican.

Contenido	Origen	Enfoque
Simetrías, mosaicos y teselas.	Singapur	Son contenidos de 4.º curso de Educación Primaria. Existen algunos ejercicios sobre estos conceptos, pero se encuentran en los apartados de repaso.
	España	El concepto de simetría se trabaja desde 3.º curso. Cada año se añade más complejidad, pero los dos únicos libros de 6.º curso correspondientes a la LOMCE que tienen contenidos referidos a la simetría dan el contenido como si fuera la primera vez. Los mosaicos y las teselas desaparecen del currículo del curso con la LOMCE, y los libros no los mencionan en ningún caso.
Movimientos en el plano.	Singapur	Son contenidos de 5.º curso, de los cuales no hay ninguna reminiscencia ni en las secciones de repaso.
	España	A pesar de que el currículo de la LOMCE contiene la reproducción con regla, compás y transportador de ángulos de una figura geométrica dada, así como la aplicación de homotecias sobre ella, solamente dos de los cuatro libros instruyen sobre este particular.
Cuerpos geométricos.	Singapur	Se abordan dos contenidos principales: -Reconocimiento de cubos, ortoedros, pirámides, cilindros y conos, aunque no se dan definiciones rigurosas sino que el contenido se presenta ostensivamente. -Desarrollos de poliedros (nets). Este contenido, prácticamente inexistente en España, practica los desarrollos planos de cubos, ortoedros y pirámides.
	España	En los libros se definen los conceptos cubo, prisma y pirámide. También se incluye a los cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera. En el currículo, sin embargo, no se concreta qué cuerpos geométricos deben incluirse. Se da una lista de los sólidos platónicos, en ocasiones con sus desarrollos.
Ángulos.	Singapur	Los contenidos se reducen a deducir un ángulo en una figura geométrica (compuesta) a partir de otro ángulo y de información sobre paralelismo y perpendicularidad en la figura. No se hacen operaciones con ángulos.
	España	Se definen los tipos de ángulos (agudo, recto, obtuso, llano) y las relaciones entre ellos (complementario, suplementario). En los libros se pone un importante énfasis en dos aspectos de los ángulos: -Conversión de forma incompleja a compleja y viceversa. -Operaciones con ángulos: suma, resta, multiplicación por números naturales.

Tabla 104

Comparación de los contenidos del bloque de Análisis de datos de los currículos de Singapur y España y de la forma en que los libros los aplican.

Contenido	Origen	Enfoque
Estadística descriptiva.	Singapur	No forma parte de los contenidos de 6.º curso. En las secciones de repaso se incluyen con frecuencia problemas relacionados con la media aritmética. Las definiciones de media, mediana y moda pertenecen a 5.º. Las tablas de frecuencias se estudian por vez primera en 1.º curso de Educación Secundaria.
	España	Se trabaja con tablas de frecuencias absolutas y relativas. Se repiten los contenidos de 5.º curso. Se estudia la media, la mediana, la moda y el rango. Los ejercicios sobre media aritmética consisten en calcular la media de un conjunto de datos. En uno de los libros de LOMCE, se encuentra un ejercicio en el que se pide calcular un dato a partir de otro y la media de los dos.
Tablas y gráficas	Singapur	Solamente se estudian los diagramas de sectores (los gráficos de líneas e histogramas son de 4.º curso y los diagramas de barras son de 5.º curso), aunque siempre se dedica un capítulo entero a ellos. No se pide reproducir diagramas de sectores a partir de datos (lo que implicaría el cálculo con ángulos). El enfoque es el de interpretar los gráficos, respondiendo preguntas sobre ellos (cuántos individuos pertenecen a una categoría dada, qué categoría es minoritaria, etc).
	España	De acuerdo al currículo, se revisitan por tercera vez los diagramas de barras (que aparecen en 4.º curso y en 5.º curso) y por segunda vez los de líneas y de sectores. Los libros, sin embargo, contienen muy pocos ejercicios relacionados con gráficas, pues se dedican una o a lo sumo dos secciones de tema a los histogramas, polígonos de frecuencias y diagramas de sectores.
Probabilidad.	Singapur	La probabilidad no figura entre los contenidos escolares hasta 2.º curso de Educación Secundaria.
	España	El currículo solamente incluye el concepto de experiencia aleatoria y el cálculo intuitivo de probabilidades en el sentido de determinar intuitivamente qué resultados tienen mayor certeza de realizarse. Los libros amplían e incluyen el cálculo de probabilidades por la regla de Laplace.

Tabla 105

Comparación de los contenidos del bloque de Álgebra de los currículos de Singapur y España y de la forma en que los libros los aplican.

Contenido	Origen	Enfoque
Expresiones algebraicas en una variable (polinomios de primer grado)	Singapur	El capítulo dedicado a Álgebra es siempre el primero o el segundo del libro. Introduce el concepto de variable como número desconocido. Contiene la simplificación de expresiones algebraicas de primer grado con una sola variable, en las que ésta no puede figurar en el denominador y el coeficiente ha de ser un número natural. También se incluye el cálculo del valor numérico de estas expresiones algebraicas.
	España	Estos contenidos aparecen por primera vez en 1.º curso de Secundaria.

Todas las tablas anteriores ponen de manifiesto las profundas diferencias entre las implementaciones del currículo español y el singapurense, algunas de las cuales ya hemos hablado. Por ejemplo, la repetición sistemática de contenidos en los libros españoles, muestra del currículo en espiral mal entendido que se aplica en España. Por otra parte, se aprecia también un enfoque diferente en cuanto a lo que tiene que saber un alumno, pues los contenidos en España están muy orientados a la memorización (áreas de polígonos y volúmenes de poliedros, por ejemplo) y a la algoritmia (cálculos con ángulos, con fracciones, raíces cuadradas). No obstante, se aprecia una cierta mejora en la adherencia al currículo por parte de los libros españoles, aunque siguen gozando de un nivel de libertad mucho mayor que los libros de Singapur.

12.2.10 Futuras líneas de investigación

Toda esta información sobre la forma en que Singapur organiza sus contenidos y en que los libros de texto los plasman suscita multitud de preguntas cuya investigación se debe valorar. Algunas de esas preguntas son las siguientes:

Una vez conocidos los errores que existen en los libros de Singapur y los de la Comunidad de Madrid, e identificadas a grandes rasgos diferencias cualitativas

entre ellos, cabría realizar una investigación sobre ellos, con el fin de compararlos sistemáticamente y de manera más pormenorizada. Más aún, ante la publicación de los libros adecuados a la LOMCE, convendría realizar esa comparación utilizando estos nuevos libros como base. Aparte de esto, la aparente ubicuidad que presentan los errores en los libros de texto nos hacen reflexionar por la razón de su existencia. ¿Acaso se debe a un fenómeno de propagación del dato erróneo, como algunas investigaciones muestran, o bien se debe a la falta de precisión y rigor cuando se editan? O peor aún, ¿quizás la explicación esté en la falta de formación del profesorado encargado de elaborar los libros de texto, o existen otras razones para este fenómeno? Investigaciones futuras podrían encontrar aquí sus retos y dar continuidad al presente estudio.

En España se empieza a implantar el “método Singapur” en las etapas de Educación Infantil y 1.º, 2.º y 3.º cursos de Educación Primaria, a través de la edición de libros específicos por parte de la editorial Polygon Education. Y nos preguntamos: ¿Es aplicable el método Singapur en España y garantiza por sí solo una mejora en los rendimientos matemáticos de nuestros alumnos? ¿Qué requisitos se necesitarían para su implantación (por ejemplo, formación específica del profesorado)? ¿Hasta qué punto se puede utilizar sin adaptarlo a las particularidades de la sociedad y la educación españolas? ¿Tiene el uso de estos libros la capacidad de mejorar los resultados del aprendizaje en los niños? ¿Mejoraría el aprendizaje de los alumnos la introducción del método Singapur en las escuelas españolas?

Como hemos visto, los libros españoles consultados muestran un alto nivel de heterogeneidad y una falta de criterio unívoco a la hora de explicar sus contenidos. Es una situación muy distinta a la de los libros de Singapur, que deben primero pasar un estricto filtro por parte del Estado. En el caso de España, ¿cómo afecta esta heterogeneidad al aprendizaje de los alumnos, si es que realmente tiene algún efecto? ¿Mejoraría una mayor supervisión del Estado la calidad educativa y con ello los resultados de nuestros alumnos?

Es un lugar común que la forma de pensar y la actitud de los habitantes de los países mediterráneos es muy distinta de la de otros países, por ejemplo los nórdicos. Teniendo en cuenta que el programa PISA está diseñado por una organización ajena a la cultura mediterránea, ¿hasta qué punto la idiosincrasia de la cultura española, o de cualquier otra cultura, afecta a sus resultados en las pruebas internacionales, más allá de la influencia que su sistema educativo tiene sobre estos resultados?

El currículo de Singapur se ha diseñado de forma que su extensión sea mucho menor, pero los conceptos que contiene son trabajados en profundidad. El currículo español no comparte esa perspectiva. ¿Podrían mejorar los resultados de los alumnos españoles, tanto en el colegio como en las pruebas internacionales, si se desarrollase un currículo que contuviese solamente una serie de conceptos escogidos de entre los que actualmente se imparten, y que estos conceptos fuesen trabajados en profundidad?

En cuanto a la metodología de la enseñanza, ¿de qué forma se podría introducir en España un recorrido para la adquisición de los contenidos que pasara por las tres fases que se recorren en Singapur: manipulativo, pictórico y abstracto?

Por otra parte, no se puede ignorar la importancia crucial del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por una parte, los niveles de exigencia a los que los estudiantes de magisterio se someten en España se sitúan muy por debajo de los que tienen que superarse en otros países como Finlandia (Caballero García, 2010) o Singapur (Sclafani, 2008). ¿Qué podemos aprender de ambos modelos? Por otra parte, sería necesario realizar investigaciones que recabasen información sobre cómo se lleva a cabo la didáctica de la matemática actual en España. Aunque hay estudios, como el Teaching and Learning International Survey o TALIS (Echazarra, Salinas, Méndez, Denis y Rech, 2016; Fernández Díaz, Rodríguez Mantilla y Martínez Zarzuelo, 2015; OCDE, 2016d) que apuntan a las ventajas de metodologías basadas en el constructivismo y metodologías mixtas, su diseño y las incongruencias con los resultados de los alumnos (Fernández Díaz, Rodríguez Mantilla y Martínez Zartuelo, 2016) señalan a la necesidad de ahondar en la metodología del profesorado.

La respuesta a todos y cada uno de estos interrogantes abre las puertas a nuevas investigaciones; son nuevas ventanas que se abren en un intento por mejorar la manera de enseñar y aprender la matemática.

12.2.11. Reflexiones finales.

En síntesis, como podemos ver, en Singapur los contenidos están mucho más fraccionados y distribuidos a lo largo de los cursos de Educación Primaria. Esto lleva a que cada aspecto del currículo sea abordado con gran profundidad, llegando los

alumnos a realizar problemas de gran complejidad. Además, permite dedicar a cada sección del currículo el espacio necesario para que el alumno llegue a asimilarlo, de forma que no tenga que volver a repetirse el curso siguiente. A este aspecto contribuye el hecho de que los contenidos se ofrecen en su debido contexto y cuando aportan algo al concepto que se está tratando, como es el caso de la raíz cuadrada.

Otro aspecto a destacar es el hecho de que el aprendizaje está centrado en la resolución de problemas, para los que es necesario un conocimiento profundo de los contenidos propuestos y sus relaciones, y no simples ejercicios de cálculo y de aplicación de algoritmos.

Además, al transmitir los conceptos a través de problemas (pasando de lo concreto a lo pictórico, y de lo pictórico a lo abstracto), dichos conceptos están vinculados a situaciones reales (y no a simples contenidos que hay que estudiar), lo que favorece el andamiaje, el aprendizaje significativo, más profundo y de eficacia académica y práctica.

Por último, cabe destacar el tema de la evaluación. En el tipo de desafíos y problemas que aparecen en los libros, podemos observar que, a la hora de plantear al alumnos que realice una acción matemática, ésta no se limita a la aplicación del contenido que se acaba de explicar, sino que solicita de él un verdadero “hacer matemático”, permitiendo de este modo que desarrolle su potencial matemático, y huyendo de una posible “autocomplacencia” del que enseña (“le propongo esto que sé que lo va a saber hacer”), que puede impedir el crecimiento matemático del alumno. Este “hacer matemático” está muy relacionado con los tres niveles de profundidad en que se clasifican los problemas en PISA (OCDE e INEE, 2013):

- Reproducción. Basta la realización de operaciones matemáticas simples para su resolución.
- Conexión. Requieren la combinación de ideas para resolver problemas con una solución directa.
- Reflexión. La resolución de estos problemas implica la aplicación de un pensamiento matemático amplio.

Existe una elevada concentración de ejercicios de reproducción en los libros más utilizados de la Comunidad de Madrid, mientras que existen sumamente pocos

en los libros de Singapur. No es de extrañar, pues, que el rendimiento de los alumnos españoles en las pruebas PISA sea mediocre, mientras que el de los alumnos singapurenses sea excelente: en Singapur es común desafiar a los alumnos, de modo que éstos están habituados a ello. En España los alumnos están mucho más habituados a reproducir operaciones, y no a establecer conexiones entre los diferentes conceptos.

Es por esto que consideramos en este trabajo que la educación matemática en España y en Singapur poseen diferencias de un profundo calado, que merecen ser exploradas con gran atención y que sin duda constituyen una ventana a través de la cual podemos asomarnos, reflexionar y dar sentido a lo que hacemos, y abrir camino a una nueva forma de enseñar matemáticas que nos rete, nos motive y nos aliente a la mejora educativa continua.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Referencias bibliográficas

- Acevedo Díaz, J. A. (2005). TIMSS Y PISA. Dos proyectos internacionales de evaluación del aprendizaje escolar en ciencias. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 2(3), 282-301.
- Aguerrondo, I. (1993). La calidad de la educación: ejes para su definición y evaluación. *Revista interamericana de desarrollo educativo*, 37(116), 561-578.
- Aguerrondo, I. (2008). La influencia del contexto en la efectividad de la escuela. Consideraciones para el desarrollo profesional docente. En R. Blanco (Ed.), *Eficacia escolar y factores asociados en América latina y el Caribe*. Chile: Oficina Regional de la Educación de la UNESCO para América Latina y el Caribe (OREALC/UNESCO Santiago) y Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE).
- Ahuja, O. P. (2006). World-class high quality mathematics education for all K-12 American students. *The Mathematics Enthusiast*, 3(2), 223-248.
- Alatas, H., Sandhu, K. S. y Wheatley, P. (1989). *Management of success: The moulding of modern Singapore*. Singapur: Institute of Southeast Asian Studies.
- Alber-Morgan, S. R., Ramp, E. M., Anderson, L. L. y Martin, C. M. (2007). Effects of repeated readings, error correction, and performance feedback on the fluency and comprehension of middle school students with behavior problems. *The Journal of Special Education*, 41(1), 17-30.
- Almodóvar Herráiz, J. A., García Atance, P., Rodríguez Pecharromán, M. y Pérez Saavedra, C. (2015). *Proyecto Saber Hacer, matemáticas, 6 Educación Primaria*. Madrid: Santillana Educación s.l.
- Almodóvar Herráiz, J. A. y Rodríguez Pecharromán, M. (2009). *Proyecto La Casa del Saber, matemáticas, 6 Educación Primaria*. Madrid: Santillana Educación s.l.
- Alonso Garzón, G., Bernal López, E. I., Ferrero de Pablo, L. y Martín Martín, P. (2015). *Aprender es crecer, matemáticas, 6 Educación Primaria*. Madrid: Grupo Anaya s.a.
- Alonso Tello, C., López Barriga, P. y de la Cruz Vicente, O. (2013). Creer tocando. *Tendencias pedagógicas*, 21, 249-262.

- Alzate Piedrahita, M. V. (1999). El texto escolar como instrumento pedagógico: Partidarios y detractores. *Revista de Ciencias Humanas*, 21(Septiembre), 110-118.
- Anderson, J. (2009). *Mathematics curriculum development and the role of problem solving*. Paper presentado en Proceedings of 2009 ACSA National Biennial Conference. Curriculum: A National Conversation, Canberra, Australia.
- Andréu Abela, J. (2002). *Las técnicas de análisis de contenido: Una revisión actualizada*. Recuperado de <http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf>
- Ang, K. C. (2001). Teaching mathematical modelling in Singapore schools. *The Mathematics Educator*, 6(1), 63-75.
- Aravena, M., Kimelman, E., Micheli, B., Torrealba, R. y Zúñiga, J. (2006). *Investigación educativa I*. Chile: Universidad ARCIS y AFEFCE.
- Arribas Alonso, C., García, M. d. C. y Román González, J. A. (2015). *Superpitépolis, matemáticas, 6 Educación Primaria*. Madrid: Edelvives.
- Arribas Alonso, C. y Román González, J. A. (2009). *Proyecto Mundo Agua, matemáticas, 6 Educación Primaria*. Madrid: Edelvives.
- Arthur, R., Stow, D. y McCall, G. (1996). Lies, damn lies and books on geology. *Geoscience education and training. In schools and universities, for industry and public awareness*, 289-291.
- Artlet, C., Baumert, J., Julius-McElvany, N. y Peschar, J. (2003). *Learners for Life. Student Approaches to Learning. Results from PISA 2000*. Francia: Organisation for Economic Cooperation and Development.
- Association to Advance Collegiate Schools of Business. (2016). *Eligibility procedures and accreditation standards for business accreditation*. Tampa, FL: AACSB International.
- Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A. y Wortham, D. W. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Psychology*, 95, 762-773.
- Ausubel, D. P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning*. Nueva York, NY: Grune & Stratton.
- Ball, D. L. (2003). What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics. En E. Simmt y B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*. Canadá: Canadian Mathematics Education Study Group.

- Ballesta Pagán, F. J. (1995). Función didáctica de los materiales curriculares. *Pixel-Bit: Revista de medios y educación*, 5.
- Ban Har, Y. (2007). *The Singapore Mathematics Curriculum and Mathematical Communication*. Paper presentado en APEC-TSUKUBA International Conference III, Tokio, Kanazawa y Kyoto, Japón.
- Banco Mundial. (2016a, 21 de diciembre de 2016). *Gasto público en educación, total (% del PIB)*. Recuperado de <http://datos.bancomundial.org/indicador/SE.XPD.TOTL.GD.ZS>
- Banco Mundial. (2016b). *GNI per capita ranking, Atlas method and PPP based*. Recuperado de <http://data.worldbank.org/data-catalog/GNI-per-capita-Atlas-and-PPP-table>
- Banco Mundial. (s.f.). *GDP growth (annual %)*. Recuperado de <http://data.worldbank.org/indicador/NY.GDP.MKTP.KD.ZG?end=2015&locations=SG&start=2010>
- Banicky, L. (2000, octubre). *Opportunity to Learn*. College of Human Resources, Education, and Public Policy, University of Delaware, Education Policy Brief, vol. 7.
- Bardin, L. (2002). *Análisis de contenido*. España: Ediciones Akal.
- Barr, M. D. y Skrbiš, Z. (2008). *Constructing Singapore: Elitism, ethnicity and the nation-building project*. Dinamarca: Nias Press.
- Barrantes López, M. y Zapata Esteves, M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27(1), 55-71.
- Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. Á. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, 9(2), 107-127.
- Barrón Ruiz, Á. (1993). Aprendizaje por descubrimiento: principios y aplicaciones inadecuadas. *Enseñanza de las Ciencias*, 11(1), 3-11.
- Bartolomé, M. (1992). Investigación cualitativa: ¿Comprender o transformar? *Revista de investigación educativa*, 20(2), 7-36.
- Beckmann, S. (2004). Solving Algebra and Other Story Problems with Simple Diagrams: A Method Demonstrated in Grade 4-6 Texts Used in Singapore. *Mathematics Educator*, 14(1), 42-46.
- Benacerraf, P. (1973). Mathematical truth. *The Journal of Philosophy*, 70(19), 661-679.
- Berelson, B. (1952). *Content Analysis in Communication Research*. Escocia: Free Press.

- Berga Espona, M. (2014). El juego con materiales manipulativos para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil: Una propuesta para niños y niñas de 3 a 4 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(2), 63-93.
- Bernete García, F. (2014). Análisis de contenido (cuantitativo y cualitativo). En A. Lucas Marín y A. Noboa (Coords.), *Conocer lo Social: Estrategias, técnicas de construcción y análisis de datos* (pp. 221-261). España: Fragua.
- Binkley, M., Rust, K. y Williams, T. (1996). *Reading Literacy in an International Perspective: Collected Papers from the IEA Reading Literacy Study*. Washington D.C., WA: National Center for Education Statistics.
- Binkley, M. y Williams, T. (1996). *Reading Literacy in the United States. Findings from the IEA Reading Literacy Study*. Washington D.C, WA: National Center for Education Statistics.
- Bisquerra Alzina, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. España: La Muralla.
- Blanco Nieto, L., Caballero Carrasco, A., Piedehierro, A., Guerrero Barona, E. y Gómez del Amo, R. (2010). El Dominio afectivo en la Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. *Campo Abierto*, 29(1), 13-31.
- Bland, J. M. y Altman, D. G. (1988). Misleading statistics: errors in textbooks, software and manuals. *International journal of epidemiology*, 17(2), 245-247.
- Bloom, B. S. (1969). *Cross-National Study of Educational Attainment: Stage I of the IEA Investigation in Six Subject Areas. Final Report. Volume II*. Recuperado de <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED034290.pdf>
- Bonafe, E. (1992). ¿Cómo analizar los materiales? *Cuadernos de pedagogía*, 203, 14-18.
- Borel, É. (1962). La definición en matemáticas. En F. LeLionnais et al. (Ed.), *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* (pp. 25-35). Argentina: Editorial Universitaria de Buenos Aires.
- Bouvier, A. y George, M. (2005). *Diccionario Akal de Matemáticas*. España: Akal.
- Bravo Ramos, J. L. (2004). Los medios de enseñanza: clasificación, selección y aplicación. *Pixel-Bit: Revista de medios y educación*, 24, 113-124.
- Bray, M. (2008). *Double-shift schooling: Design and operation for cost-effectiveness* Vol. 90. Francia: United Nations.

- Bray, M. y Kobakhidze, M. N. (2014). Measurement issues in research on shadow education: Challenges and pitfalls encountered in TIMSS and PISA. *Comparative Education Review*, 58(4), 590-620.
- Brewer, J. K. (1985). Behavioral statistics textbooks: Source of myths and misconceptions? *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 10(3), 252-268.
- Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: Bellknap Press.
- Bruner, J. (1972). *El proceso de educación*. México: Uteha.
- Buendía Eisman, L., Colás Bravo, P. y Hernández Pina, F. (1997). *Métodos de Investigación en Psicopedagogía*. España: McGraw-Hill.
- Burstein, L. y Hawkins, J. (1986). *An Analysis of Cognitive, Non-Cognitive, and Behavioral Characteristics of Students in Japan*. Washington D. C., WA: Office of Educational Research and Improvement.
- Bustelo Gómez, P. (1990). *Economía política de los nuevos países industriales asiáticos*. España: Siglo XXI de España.
- Bustelo Gómez, P. (1994). *Los cuatro dragones asiáticos: economía, política y sociedad*. España: ESIC.
- Caballero García, P. A. (2010). Propuestas de solución para los problemas educativos de hoy. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 13(4), 53-65.
- Cabero Almenara, J., Duarte Hueros, A. y Romero Tena, R. (1995). Los libros de texto y sus potencialidades para el aprendizaje. En J. C. Almenara y L. M. V. Angulo (Eds.), *Aspectos Críticos de una Reforma Educativa*. España: Universidad de Sevilla. Secretariado de Publicaciones.
- Cabero Almenara, J. y Loscertales Abril, F. (1996). Elaboración de un sistema categorial de análisis de contenido para analizar la imagen del profesor y la enseñanza en la prensa. *Bordón: Revista de Orientación Pedagógica*, 48(4), 375-392.
- Cabero, J., Duarte, A. y Barroso, J. (1989). La formación del profesorado en nuevas tecnologías: retos hacia el futuro. En J. Ferrés y P. Marqués (Eds.), *Comunicación educativa y nuevas tecnologías*. España: Praxis.
- Cabo Nodar, M. y Moreno Pineda, G. (2007). *Método gráfico de Singapur: solución de problemas, 1: primaria integral*. España: Santillana.

- Cacheiro González, M. L. (2011). Recursos educativos TIC de información, colaboración y aprendizaje. *Pixel-Bit: Revista de medios y educación*, 39, 69-81.
- Campanario, J. M. (2001). ¿Qué puede hacer un profesor como tú o un alumno como el tuyo con un libro de texto como éste? Una relación de actividades poco convencionales. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 351-364.
- Campanario, J. M. (2006). Using textbook errors to teach physics: examples of specific activities. *European journal of physics*, 27(4), 975-981.
- Carabaña Morales, J. (2002). *La LOGSE, la LOCE y el Informe PISA*. Paper presentado en IX Conferencia de Sociología de la Educación, Palma de Mallorca, España.
- Cardoso, D. C., Cristiano, M. P. y Arent, C. O. (2009). Development of new didactic materials for teaching science and biology: The importance of the new education practices. *OnLine Journal of Biological Sciences*, 9(1), 1-5.
- Carpenter, T. P., Fennema, E. y Franke, M. L. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *The Elementary School Journal*, 97, 3-20.
- Carrión Miranda, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Unión, Revista iberoamericana de educación matemática*, 11, 19-57.
- Castañeda Yáñez, M. (1979). *Los medios de la comunicación y la tecnología educativa*. México: Trillas.
- Castellanos Quintero, S. J. (2006). La educación comparada: una disciplina científica con grandes perspectivas para el mundo de hoy. *Acalán. Revista de la Universidad Autónoma del Carmen.*, 41, 2-3.
- Cintas Serrano, R. (2000). Actividades de enseñanza y libros de texto. *Investigación en la Escuela*, 40, 97-106.
- Clapham, C. (1998). *Diccionario Oxford de Matemáticas*. España: Editorial Complutense.
- Clapham, C. y Nicholson, J. (2009). *The concise Oxford dictionary of mathematics*. Reino Unido: Oxford University Press.
- Clark, C. M. y Yinger, R. J. (1979). *Three Studies of Teacher Planning. Research Series No. 55*. Paper presentado en Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

- Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan: informe Cockroft*. España: Ministerio de Educación y Ciencia, Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado.
- Connelly, M. (1996). La política exterior de Taiwan. *Estudios de Asia y África*, 31(2), 271-290.
- Corfield, J. (2010). *Historical dictionary of Singapore* Vol. 77. Reino Unido: Scarecrow Press.
- Cornelius-Takahama, V. (2001). *Islands of Singapore*. Recuperado de http://eresources.nlb.gov.sg/infopedia/articles/SIP_150_2005-01-20.html?s=Islands-Singapore
- Costa, M. F. y Dorrió, B. V. (2010). Actividades manipulativas como herramienta didáctica en la educación científico-tecnológica. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 7(2), 462-472.
- Cuadrado Morales, J. F. (2010). El tangram: un recurso educativo para trabajar la geometría en la educación primaria. *Revista digital de innovación y experiencias educativas*, 35.
- Chan, E. C. M. (2009). Mathematical modelling as problem solving for children in the Singapore mathematics classrooms. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 32(1), 36-61.
- Chang, A. S.-C. (1990). *Streaming and Learning Behaviour*. Paper presentado en Annual Convention of the International Council of Psychologists, Tokio, Japón.
- Chang, H.-W., Choi, M. y Lim, M. (2014). Analysing Textbooks and Devising Activities in relation to Errors of Zero(0). *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 18(2), 257-278.
- Chartier, R. (2001). ¿Muerte o transfiguración del lector? *Revista de Occidente*, 239, 72-86.
- Chavarría, J. (2008). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 1(2), 31-40.
- Chee, C. H. y Evers, H.-D. (1972). National Identity and Nation-building in Southeast Asia. En S. N. Eisenstadt y S. Rokkan (Eds.), *Building States and Nations*. Beverly Hills, CA: SAGE Publications.
- Cheong, Y. K. (2002). The model method in Singapore. *The Mathematics Educator*, 6(2), 47-64.

- Chew, J. O. A. (1993). *Schooling for Singaporeans: The interaction of Singapore culture and values in the school*. Paper presentado en Symposium on International Perspectives on Culture and Schooling, Londres, Inglaterra.
- Chia, Y. T. (2011). *The Loss of the 'World-Soul'? Education, Culture and the Making of the Singapore Developmental State, 1955–2004*. (Tesis doctoral). University of Toronto, Canadá.
- Choppin, A. (1992). *Les manuels scolaires: histoire et actualité*. Francia: Hachette Education.
- Choy, D., Wong, A. F. y Gao, P. (2008). *Singapore's preservice teachers' perspectives in integrating information and communication technology (ICT) during practicum*. Paper presentado en AARE Annual Conference 2008, Canberra, Australia.
- Daintith, J. (1982). *Diccionario de Matemáticas* (J. M. Castaño, Trad.). Colombia: Norma.
- Daly, C. y Liggins, D. (2010). In defence of error theory. *Philosophical Studies*, 149(2), 209-230.
- Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive approach to mathematics education*. . Norwood, NJ: Ablex Publishing Company.
- Decreto 22/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Primaria. *Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid*, núm. 126, de 29 de mayo de 2007, Pages
- Decreto 89/2014 de 24 de julio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el Currículo de la Educación Primaria. *Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid*, núm. 175, de 25 de julio de 2014, Pages
- Del Rincón, D., Arnal, J., Latorre, A. y Sans, A. (1995). *Técnicas de investigación en ciencias sociales*. Madrid: Dykinson.
- Delors, J., et al. (1997). *La educación encierra un tesoro: informe para la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo Veintiuno*. Francia: Unesco.
- Departamento de Elecciones de Singapur. (s.f.). *Parliamentary Elections Results*. Recuperado de <http://www.eld.gov.sg/>
- Detzel, P. y Ruiz, M. E. (2008). Lo que el profesor enseña vs lo que el alumno aprende: un caso para reflexionar. En M. E. Ascheri, R. A. Pizarro y N. Ferreyra (Eds.), *II Reunión Pampeana de Educación Matemática - Memorias* (pp. 333-339). Argentina: Editorial Universidad Nacional de La Pampa.

- Dindyal, J. (2006). The Singaporean mathematics curriculum: Connections to TIMSS. En P. Grootenboer, R. Zevenbergen y M. Chinnappan (Eds.), *Proceedings of the 29 Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 179-186). Australia: MERGA.
- Domingo Coscollola, M. y Fuentes Agustí, M. (2010). Innovación educativa: experimentar con las TIC y reflexionar sobre su uso. *Pixel-Bit: Revista de medios y educación*, 36, 171-180.
- Dorio, I., Sabariego, M. y Massot, I. (2004). Características generales de la investigación cualitativa. En R. Bisquerra (Coord.), *Metodología de la investigación educativa* (pp. 204-219). Madrid: La Muralla.
- Dormolen, J. v. (1986). Textual Analysis. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education: Papers Submitted by Members of the Bacomet Group* (pp. 141-171). Holanda: Springer
- Driscoll, M. J. (1983). *Research within Reach: elementary school mathematics and reading*. St. Louis: CEMREL.
- Drysdale, J. (2008). *Singapore Struggle for Success*. Singapur: Marshall Cavendish International Asia Pte Ltd.
- Eco, U. (2016). *De la estupidez a la locura: Crónicas para el futuro que nos espera*. España: Lumen.
- Echazarra, A., Salinas, D., Méndez, I., Denis, V. y Rech, G. (2016). *How teachers teach and students learn: Successful strategies for school*. Paris: OECD Publishing.
- Edel Navarro, R. y Guerra Ortigón, C. E. (2010). Recursos didácticos para la educación a distancia: hacia la contribución de la realidad aumentada. *Ide@s CONCYTEG*, 5(61), 702-715.
- Edwards, B. S. y Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis) use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, 111(5), 411-424.
- Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Barcelona: Paidós.
- Elley, W. B. (1992). *How in the World Do Students Read? IEA Study of Reading Literacy*. Holanda: IEA.
- Englard, L. (2010). RAISE THE BAR. *teaching children mathematics*, 17(3), 156-165.

- Esteban Guitart, M. (2009). Las ideas de Bruner: "de la revolución cognitiva" a la "revolución cultural". *Educere: Revista Venezolana de Educación*, 13(44), 235-241.
- Fang, Y., Lee, C. K. y Yang, Y. (2011). Developing curriculum and pedagogical resources for teacher learning: A lesson study video case of "Division with Remainder" from Singapore. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1(1), 65-84.
- Favale, F. y Bondani, M. (2014). *Misconceptions about optics: an effect of misleading explanations?* Paper presentado en 12th Education and Training in Optics and Photonics Conference, Porto, Portugal.
- Fernández Amigo, J. (2008). *Utilización de material didáctico con recursos de ajedrez para la enseñanza de las matemáticas. Estudio de sus efectos sobre una muestra de alumnos de 2º de Primaria*. Universidad Autónoma de Barcelona, España. Recuperado de <http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/5053/jfa1de1.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Fernández Bravo, J. A. (2011). La inestabilidad de la normalidad del error en la actividad escolar. ¿Cuánto de error tienen los errores que cometen los alumnos? *Educación y Futuro: Revista de investigación aplicada y experiencias educativas*, 24, 181-203.
- Fernández Díaz, M. J., Rodríguez Mantilla, J. M. y Martínez Zartuelo, A. (2016). PISA y TALIS. ¿Congruencia o discrepancia? *RELIEVE*, 22(1). doi: <http://dx.doi.org/10.7203/relieve.22.1.8247>
- Fernández Díaz, M. J., Rodríguez Mantilla, J. M. y Martínez Zarzuelo, A. (2015). Práctica docente del profesorado de Educación Secundaria Obligatoria en España según TALIS 2013. *Revista española de pedagogía*, 73(261), 225-244.
- Fernández Palop, P. (2013). *Errores matemáticos en libros de texto de sexto curso de Educación Primaria, utilizados en la Comunidad de Madrid para la enseñanza de las matemáticas*. (Tesis doctoral). Universidad Camilo José Cela, España.
- Fernández Palop, P. y Caballero García, P. A. (2017). El libro de texto como objeto de estudio y recurso didáctico para el aprendizaje: fortalezas y debilidades. *Revista electrónica interuniversitaria de formación del profesorado*, 20(1), 201-217.
- Fernández Palop, P., Caballero García, P. A. y Carretero Cenjor, M. J. (2015). *Group games in mathematics learning: a resource for everyone*. Paper presentado en 9th International Technology, Education and Development Conference (INTED2015), Madrid, España.

- Fernández Palop, P., Caballero García, P. A. y Fernández Bravo, J. A. (2013). ¿ Yerra el niño o yerra el libro de Matemáticas? *Números* 83, 131-148.
- Ferrero de Pablo, L., Gaztelu Albero, I. y Martín Martín, P. (2009). *Abre la puerta, Matemáticas, 6, Educación Primaria*. Madrid: Grupo Anaya s.a.
- Fetzer, J. S. (2008). Election strategy and ethnic politics in Singapore. *Taiwan Journal of Democracy*, 4(1), 135-153.
- Fiallo Leal, J. E. (2015). Acerca de la investigación en educación matemática desde las tecnologías de la información y la comunicación. *Actualidades Pedagógicas*, 66, 69-83.
- Fleiss, J. L., Cohen, J. y Everitt, B. (1969). Large sample standard errors of kappa and weighted kappa. *Psychological Bulletin*, 72(5), 323-327.
- Fogarty, R. y Pete, B. M. (2010). The Singapore vision: Teach less, learn more. En J. Bellanca y R. Brandt (Eds.), *21st century skills: Rethinking how students learn* (pp. 97-116). Bloomington, IN: Solution Tree Press.
- Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the learning of mathematics*, 27(2), 2-14.
- Foong, P. Y. (2007). Teacher as researcher: a review on mathematics education research of Singapore teachers. *The Mathematics Educator*, 10(1), 3-20.
- Franco Mariscal, A. J. (2005). Como muestra un botón: un ejemplo de trabajo práctico en el área de ciencias de la naturaleza en el segundo curso de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las ciencias*, 23(2), 275-292.
- Franklin, J. (2009). Aristotelian realism. En A. Irvine (Ed.), *Handbook of the philosophy of science. Philosophy of mathematics* (pp. 103-155). Holanda: Elsevier BV.
- Franzolin, F. y Bizzo, N. (2015). Types of Deviation in Genetics Knowledge Presented in Textbooks Relative to the Reference Literature. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 167, 223-228.
- Fredriksen, B. y Peng, T. J. (2008). *Toward a Better Future*. Singapur: The World Bank, National Institute of Education.
- Fuchs, L. S., Seethaler, P. M., Powell, S. R., Fuchs, D., Hamlett, C. L. y Fletcher, J. M. (2008). Effects of preventative tutoring on the mathematical problem solving of third-grade students with math and reading difficulties. *Exceptional Children*, 74(2), 155-173.

- Gagatsis, A. y Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, 6(1), 24-58.
- Gallego Gil, D., Cacheiro González, M. L. y Dulac, J. (2009). La pizarra digital interactiva como recurso docente. *Revista Electrónica Teoría de la Educación*, 10(2), 127-145.
- García-Caballero, P. A. (2010). Propuestas de solución para los problemas educativos de hoy. *Revista electrónica interuniversitaria de formación del profesorado*, 13(4), 53-65.
- García Garrido, J. L. (1996). *Fundamentos de educación comparada*. España: Librería-Editorial Dykinson.
- García Mateos, A. y Caballero García, P. A. (2005). La tecnología digital en el aula: un instrumento al servicio de los procesos de enseñanza-aprendizaje *Diploma de estudios avanzados*. Madrid, España: Universidad Camilo José Cela.
- Garden, R. A. (1987). *Second IEA Mathematics Study. Sampling Report*. Recuperado de http://www4.gu.se/compeat/SIMS/Design/SIMS_Sample.pdf
- Gascón Pérez, J. (1985). El aprendizaje de la resolución de problemas de planteo algebraico. *Enseñanza de las Ciencias*, 3(1), 018-027.
- Gaviria, J. L., Martínez-Arias, R. y Castro, M. (2004). Un estudio multinivel sobre los factores de eficacia escolar en países en desarrollo: el caso de los recursos en Brasil. *Archivos Analíticos de Políticas Educativas. AAPE*, 12(20).
- Generelo-Pérez, M. G., Escobar, A. A., Agudo, J. E. y Rico, M. (2010). *Portafolio electrónico basado en competencias para Educación Primaria*. Paper presentado en CEDI 2010. Simposio Nacional de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en la Educación (ADIE), SINTICE 2010, Valencia, España.
- Ginsburg, A. y Leinwand, S. (2005). *Singapore Math: Can it help close the US mathematics learning gap?* Paper presentado en CSMC's First International Conference on Mathematics Curriculum, November.
- Ginsburg, A., Leinwand, S., Anstrom, T. y Pollock, E. (2005). *What the United States Can Learn From Singapore's World-Class Mathematics System (and What Singapore Can Learn from the United States): An Exploratory Study*. Washington D.C., WA: American Institutes for Research.
- Godino, J. D., Willhelmi, M. R. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4(2), 1-26.

- Goh, C. B. y Gopinathan, S. (2006). *The Development of Education in Singapore since 1965*. Paper presentado en Asia Education Study Tour for African Policy Makers, Singapur y Vietnam.
- Gómez Mendoza, M. A. (2000). Análisis de contenido cualitativo y cuantitativo: definición, clasificación y metodología. *Revista de Ciencias Humanas*, 20, 105-113. Recuperado de <http://www.utp.edu.co/~chumanas/revistas/revistas/rev20/gomez.htm>
- González Morales, A. (2003). Los paradigmas de investigación en las ciencias sociales. *Islas*, 45(138), 125-135.
- González Nagel, E. J., et al. (1998). *User guide for the TIMSS international database*. Chestnut Hill, MA: TIMSS International Study Center.
- González Sánchez, Y., et al. (2015). *Proyecto Savia, matemáticas, 6 Educación Primaria*. Madrid: Ediciones SM.
- González Such, J. y Bakieva, M. (2013). *Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. Informe español*. Vol. I. Madrid: Instituto Nacional de Evaluación Educativa.
- Gorard, S. (2004). The international dimension: What can we learn from the PISA study? En H. Claire (Ed.), *Gender in education 3-19: A Fresh Approach*. Reino Unido: Association of Teachers and Lecturers.
- Greabell, L. C. (1978). The effect of stimuli input on the acquisition of introductory geometric concepts by elementary school children. *School Science and Mathematics*, 78, 320-326.
- Güemes Artilles, R. M. (1994). *Libros de texto y desarrollo del currículo en el aula. Un estudio de casos*. (Tesis doctoral). Universidad de La Laguna, España.
- Guilar, M. E. (2009). Las ideas de Bruner: “de la revolución cognitiva” a la “revolución cultural”. *Educere: Revista Venezolana de Educación*, 13(44), 235-241.
- Gustafsson, J.-E. (2010). *Knowledge and skills in Swedish comprehensive school during 40 years: A reassessment of the evidence based on IEA studies*. Paper presentado en 4th IEA IRC-conference, Gotemburgo, Suecia.
- Gutiérrez Pérez, J., Pozo Llorente, T. y Fernández Cano, A. (2002). Los estudios de caso en la lógica de la investigación interpretativa. *Arbor*, 171(675), 533-557.
- Hagiwara, Y. (1973). Formation and development of the Association of Southeast Asian Nations. *The Developing Economies*, 11(4), 443-465.
- Hamilton, D. (1990). What is a textbook? *Paradigm*, 3(Julio), 5-8.

- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.
- Herrington, J. y Herrington, A. (1998). Authentic assessment and multimedia: How university students respond to a model of authentic assessment. *Higher Education Research & Development*, 17(3), 305-322.
- Hersh, R. (1998). *What is mathematics, really?* Reino Unido: Oxford University Press.
- Hidalgo Alonso, S., Maroto Sáez, A. y Palacios Picos, A. (2004). ¿ Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de educación*, 334, 75-95.
- Hidalgo Alonso, S., Maroto Sáez, A. y Palacios Picos, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Educación matemática*, 17(2), 89-116.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Hill, M. y Lian, K. F. (2013). *The politics of nation building and citizenship in Singapore*. Reino Unido: Routledge.
- Ho, S. Y. y Lowrie, T. (2014). The model method: Students' performance and its effectiveness. *The Journal of Mathematical Behavior*, 35, 87-100.
- Holsti, O. R. (1969). *Content analysis for the social sciences and humanities*. Reading, MA: Addison Wesley.
- Hong, K. T. (1980). Mathematics curricula in school. *Mathematical Medley*, 8(2), 41-46.
- Hong, K. T., Mei, Y. S. y Lianghuo, F. (2014). Model Method in Singapore primary mathematics textbooks. En K. Jones, C. Bokhove, G. Howson y L. Fan (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT-2014)* (pp. 275). Reino Unido: University of Southampton.
- Hoong, A. W. (2008). Singapore's Textbook Experience 1965–97: Meeting the Needs of Curriculum Change. En S. K. Lee, C. B. Goh, B. Fredriksen y J. P. Tan (Eds.), *Toward a Better Future: Education and Training for Economic Development in Singapore since 1965* (pp. 69-95). Washington D. C., WA: The World Bank.
- Hoong, L. Y., Kin, H. W. y Pien, C. L. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its origins and charting its future. *The Mathematics Educator*, 16(1), 1-19.

- Hoven, J. y Garelick, B. (2007). Singapore math: Simple or complex? *Educational Leadership*, 65(3), 28.
- Huat, C. B. (2003). Multiculturalism in Singapore: An instrument of social control. *Race & Class*, 44(3), 58-77.
- Hubbard, R. y Bayarri, M. (2003). P values are not error probabilities. Recuperado de <http://ftp.isds.duke.edu/WorkingPapers/03-26.pdf>
- Hung, D., Tan, S. C. y Koh, T. S. (2006). Engaged learning: Making learning an authentic experience. En D. Hung (Ed.), *Engaged learning with emerging technologies* (pp. 29-48). Holanda: Springer.
- IEA. (2011a). *FIMS: First International Mathematics Study*. Recuperado de <http://www.iea.nl/fims>
- IEA. (2011b). *First International Science Study (FISS)*. Recuperado de <http://www.iea.nl/fiss.html>
- IEA. (2011c). *Reading Literacy Study*. Recuperado de http://www.iea.nl/reading_literacy_study.html
- IEA. (2011d). *SIMS. Second International Mathematics Study*. Recuperado de <http://www.iea.nl/sims.html>
- IEA. (2011e). *SISS. Second International Science Study*. Recuperado de <http://www.iea.nl/siss.html>
- IEA. (2011f). *TIMSS 1995. Third International Mathematics and Science Study*. Recuperado de http://www.iea.nl/timss_1995.html
- IEA. (2011g). *TIMSS 2003. Trends in International Mathematics and Science Study*. Recuperado de http://www.iea.nl/timss_2003.html
- IEA. (2013a). *prePIRLS*. Recuperado de <http://timss.bc.edu/pirls2011/prepirls.html>
- IEA. (2013b). *TIMSS 2011: Trends in International Mathematics and Science Study 2011*. Recuperado de http://www.iea.nl/timss_2011.html
- INEE. (2012). *TIMSS 2011: Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias*. Recuperado de <http://www.mecd.gob.es/inee/estudios/timss0.html>
- Instituto Nacional de Evaluación Educativa. (2016). TIMSS 2015. Informe español. *EducaINEE*, 50, 1-4.
- Ismail, N. A. y Awang, H. (2009). Mathematics Achievement among Malaysian Students: What Can They Learn from Singapore? *International Education Studies*, 2(1), 8.

- Jackson, B. (2005). Using Model-Drawing to Help Students Understand Story Problems. Recuperado de <http://web.scarsdaleschools.org/elemmath/BarModelingarticle.pdf>
- Jahan, S. (2015). *Human Development Report 2015*. New York, NY: United Nations Development Programme.
- Jaime Pastor, A., Chapa Aguilera, F. y Gutiérrez Rodríguez, Á. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 9(2), 49-62.
- Jensen, W. B. (2012). The Proper Writing of Ionic Charges. *Journal of Chemical Education*, 89(8), 1084-1085.
- Jeon, B.-U., Kim, H. y OhSookhyun. (2010). Analysis of Errors in the Contents for Science Textbook of Basic Curriculum for Special School - Centering on the Realm of Earth. *The Journal of Special Children Education*, 12(3), 119-138.
- Johnsen, E. B. (1996). *Libros de texto en el caleidoscopio*. España: Pomares-Corredor S. A.
- Jung, I. (2001). Singapore's approach to preparing new teachers to use technology in the classroom. En J. Capper (Ed.), *Case studies of innovations in teacher training and technology*. Washington, DC: The World Bank. Washington D. C., WA: The World Bank.
- Kang, S. P., Kim, S. J. y Lim, E. H. (2005). A study on the analysis of elementary mathematics textbook's illustrations - Focusing on the second grade -. *Journal of the Korean School Mathematics*, 8(2), 183-201.
- Kaur, B. (2003). *Evolution of Singapore's secondary school mathematics curricula*. Paper presentado en Talking it through: A cross-national conversation about secondary mathematics curricula, Washington D.C., WA.
- Kaur, B. (2014a). Enactment of school mathematics curriculum in Singapore: whither research! *ZDM*, 46(5), 829-836.
- Kaur, B. (2014b). Mathematics education in Singapore - an insider's perspective. *Journal on Mathematics Education*, 5(1), 1-16.
- Keeves, J. P. (1992). *Learning Science in a Changing World. Cross-National Studies of Science Achievement: 1970 to 1984*. Holanda: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.
- Kendall, M. y Gibbons, J. (1990). *Correlation methods*. Reino Unido: Oxford University Press.

- Kennedy, A. M., Mullis, I. V., Martin, M. O. y Trong, K. L. (2007). *PIRLS 2006 Encyclopedia: A Guide to Reading Education in the Forty PIRLS 2006 Countries*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- King, C. J. H. (2010). An analysis of misconceptions in science textbooks: Earth science in England and Wales. *International Journal of Science Education*, 32(5), 565-601.
- Klieme, E. (2016). *TIMSS 2015 and PISA 2015. How are they related on the country level?* Frankfurt am Main: Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung.
- Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis: An Introduction to Its Methodology*. Reino Unido: SAGE.
- Kwon, H.-j. (1998). Democracy and the politics of social welfare: a comparative analysis of welfare systems in East Asia. En R. Goodman, G. White y H.-j. Kwon (Eds.), *The East Asian welfare model: Welfare orientalism and the state* (pp. 27-74). Reino Unido: Routledge.
- Lalande, A. (2010). *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*. Francia: Editorial Presses Universitaires de France.
- Landis, J. R. y Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, 33(1), 159-174.
- Landry, R. (1998). L'analyse de contenu. En B. Gauthier (Ed.), *Recherche sociale: de la problématique à la collecte des données*. Canadá: Presses de l'Université du Québec.
- Laugwitz, D. (1987). Infinitely small quantities in Cauchy's textbooks. *Historia mathematica*, 14(3), 258-274.
- Lee, K., Lim, Z. Y., Yeong, S. H., Ng, S. F., Venkatraman, V. y Chee, M. W. (2007). Strategic differences in algebraic problem solving: Neuroanatomical correlates. *Brain research*, 1155, 163-171.
- Lee, K., Yeong, S. H., Ng, S. F., Venkatraman, V., Graham, S. y Chee, M. W. (2010). Computing solutions to algebraic problems using a symbolic versus a schematic strategy. *ZDM*, 42(6), 591-605.
- Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for research in mathematics education*, 25(6), 660-675.
- Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 187, de 6 de agosto de 1970, Pages

- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 106, de 4 de mayo de 2006, Pages
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 295, de 10 de diciembre de 2013, Pages
- Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 307, de 24 de diciembre de 2002, Pages
- Locke, J. (1970). *Some thoughts concerning education, 1693*. Inglaterra: Scolar Press.
- López Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI, Revista de educación, 4*, 167-179.
- Lovitt, T. C. y Esveldt, K. A. (1970). The relative effects on math performance of single-versus multiple-ratio schedules: A case study. *Journal of Applied Behavior Analysis, 3*(4), 261.
- Macías Ferrer, D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación, 42*(4).
- Malik, K. (2013). *Informe sobre Desarrollo Humano 2013. El ascenso del Sur: Progreso humano en un mundo diverso*. Nueva York, NY: Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo.
- Malik, K. (2014). *Human Development Report 2014*. Nueva York, NY: United Nations Development Programme.
- Martin, M. O., Gregory, K. D., Stemler, S. E. y Foy, P. (2000). *TIMSS 1999 technical report*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Beaton, A. E., Gonzalez, E. J., Smith, T. A. y Kelly, D. L. (1997). *Science Achievement in the Primary School Years. IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Chestnut Hill, MA: TIMSS International Study Center.
- Martin, M. O., Mullis, I. V. S. y Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 Technical Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Martin, M. O., Mullis, I. V. S. y Foy, P. (2008a). *TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

- Martin, M. O., Mullis, I. V. S. y Foy, P. (2008b). *TIMSS 2007 International Science Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Foy, P. y Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 International Results in Science*. Recuperado de <http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/>
- Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Foy, P. y Stanco, G. M. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Science*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
- Martin, M. O., Mullis, I. V. S., González Nagel, E. J. y Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 International Science Report: Findings From IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Martin, M. O., et al. (2000). *TIMSS 1999 International Science Report: Findings from the IEA's Repeat of the Third International Mathematics and Science Study at the Eighth Grade*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Martin, M. O., Mullis, I. V. S. y Kennedy, A. M. (2007). *Progress in International Reading Literacy Study (PIRLS): PIRLS 2006 Technical Report*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Martínez Díaz, W. A. (2013). Estado de Bienestar. *Revista electrónica de investigación en ciencias económicas*, 1(2), 203-229.
- Massone, M., Romero, N. E. y Finocchio, S. (2014). Libros de texto en la enseñanza de las Ciencias Sociales: una apuesta a la formación docente. *Perspectiva*, 32(2), 555-579.
- Mazzocco, M. M. (2005). Challenges in identifying target skills for math disability screening and intervention. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 318-323.
- McKnight, C., Crosswhite, F. J., Dossey, J. A., Kifer, E., Swafford, J. O., Travers, K. J. y Cooney, T. J. (1987). *The underachieving curriculum. Assessing U.S. school mathematics from an international perspective*. Champaign, IL: Stipes Publishing Company.
- Medina, C. y Cudmani, L. C. d. (2016). Análisis numérico del ámbito de validez del modelo convencional de tiro oblicuo. *Revista Brasileira de Ensino de Física*,

38(2). Recuperado de <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v38n2/1806-1117-rbef-38-02-e2306.pdf>

Merino, C. (1995). *Metodología cualitativa de la investigación psicosocial*. México: UNAM-CISE.

Mesa, V., Gómez Guzmán, P. y Cheah, U. H. (2012). Influence of international studies of student achievement on mathematics teaching and learning. En M. A. K. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick y F. K.-S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 861-900). Nueva York, NY: Springer.

Ministerio de Asuntos Exteriores de Singapur. (s.f.). *ASEAN*. Recuperado de http://www.mfa.gov.sg/content/mfa/international_organisation_initiatives/asean.html

Ministerio de Comercio e Industria de Singapur. (2011). *MTI Occasional Paper on Population and Economy*. Recuperado de <https://www.mti.gov.sg/MTIInsights/Documents/MTI%20Occasional%20Paper%20on%20Population%20and%20Economy.pdf>.

Ministerio de Comercio e Industria de Singapur. (2015). *Yearbook of Statistics Singapore, 2015*. Singapur: Department of Statistics Singapore, Ministry of Trade & Industry.

Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2016). España rompe la brecha educativa y se sitúa, por primera vez en la historia, al nivel de los países más avanzados del mundo [Press release]. Recuperado de <http://www.mecd.gob.es/prensa-mecd/actualidad/2016/12/20161207-pisa.html>

Ministerio de Educación Cultura y Deporte y Observatorio de la Lectura y el Libro (2015). *Informe sobre “El sector del libro en España 2013-2015”* (Working paper. Recuperado de <http://www.mecd.gob.es/dms/mecd/cultura-mecd/areas-cultura/libro/mc/observatoriolect/redirige/estudios-e-informes/elaborados-por-el-observatoriolect/sector-libro-abril2015/sector-libro-abril2015.pdf>

Ministerio de Educación, C. y D. (2015). *Instituto Nacional de Evaluación Educativa*. Recuperado de <http://www.mecd.gob.es/inee/portada.html>

Ministerio de Educación de Singapur. (2004). Refinements to Primary School Streaming [Press release]. Recuperado de <http://www.moe.gov.sg/media/press/2004/pr20040318.htm>

Ministerio de Educación de Singapur. (2006). *Mathematics Syllabus Primary*. Recuperado de <https://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/>

- Ministerio de Educación de Singapur. (2007). *50 years of Singapore education*. Recuperado de <http://www.moe.gov.sg/publications/many-pathways/>
- Ministerio de Educación de Singapur. (2010). *Parliamentary Replies. Single Session Primary School*. Recuperado de <http://www.moe.gov.sg/media/parliamentary-replies/2010/09/single-session-primary-school.php>
- Ministerio de Educación de Singapur. (2014). *Subject-based Banding in Primary School*. Recuperado de <http://www.moe.gov.sg/education/primary/files/subject-based-banding.pdf>
- Ministerio de Educación de Singapur. (2015). *Learning Support*. Recuperado de <https://www.moe.gov.sg/education/programmes/learning-support>
- Ministerio de Educación de Singapur. (2016a). *Approved Textbook List*. Recuperado de <https://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/approved-textbook-list>
- Ministerio de Educación de Singapur. (2016b). *Mode of Operations of Primary Schools in Academic Year 2016*. Recuperado de <http://www.moe.gov.sg/initiatives/single-session/>
- Ministerio de Educación de Singapur. (2016c). *Sciences*. Recuperado de <https://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/>
- Ministerio de Educación de Singapur. (2017). *Mathematics Syllabus Primary*. Recuperado de <https://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/>
- Monereo Font, C., Castelló Badia, M., Clariana, M., Palma i Muñoz, M. y Pérez Cabaní, M. L. (2000). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje*. España: Graó.
- Monterrubio Pérez, M. C. y Ortega del Rincón, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA*, 5(3), 105-127.
- Mora Sánchez, J. A. (1995). Los recursos didácticos en el aprendizaje de la geometría. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 3, 101,115.
- Morales, M., Pablo Alberto. (2012). *Elaboración de material didáctico*. México: Red Tercer Milenio.
- Mourshed, M., Chijioke, C. y Barber, M. (2010). *How The World's Most Improved School Systems Keep Getting Better*. Nueva York, NY: McKinsey & Company.
- Mullis, I., Martin, M. O., Minnich, C. A., Drucker, K. T. y Ragan, M. A. (2012). *PIRLS 2011 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Reading*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Beaton, A. E., González Nagel, E. J., Kelly, D. L. y Smith, T. A. (1998). *Mathematics and Science Achievement in the Final Year of Secondary School: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. y Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. y Drucker, K. T. (2012). *PIRLS 2011 International Results in Reading*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. y Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*. Recuperado de <http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/>
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O. y González Nagel, E. J. (2000). *TIMSS 1999: International Mathematics Report: findings from IEA's repeat of the Third International Mathematics and Science Study at the eighth grade*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O. y González Nagel, E. J. (2004). *International achievement in the processes of reading comprehension: Results from PIRLS 2001 in 35 countries*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., González Nagel, E. J. y Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., González Nagel, E. J. y Flaherty, C. L. (2002). *PIRLS 2001 Encyclopedia*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Kennedy, A. M. y Foy, P. (2007). *PIRLS 2006 international report*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Muntean, A. (2011). Sobre algunos errores en libros de texto de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. *Boletín (Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas)*, 87, 30-53.

- Murphy, S. (2010). The pull of PISA: Uncertainty, influence, and ignorance. *Inter-American Journal of Education for Democracy*, 3(1), 27-44.
- National Council of Teachers of Mathematics. (s.f.). *Principles, Standards and Expectations*. Recuperado de <http://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Principles,-Standards,-and-Expectations/>
- Neergaard, H. y Ulhøi, J. P. (2007). *Handbook of qualitative research methods in entrepreneurship*. Northampton, MA: Edward Elgar Publishing.
- Nesher, P., Greeno, J. G. y Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 13(4), 373-394.
- Neumayer, E. (2001). The human development index and sustainability—a constructive proposal. *Ecological Economics*, 39(1), 101-114.
- Ng, P. T. (2008). Educational reform in Singapore: From quantity to quality. *Educational research for policy and practice*, 7(1), 5-15.
- Noh, E. y Jang, N. H. (2015). Analysis and Improvement for Method of Boiling Point Measurement described in Middle School Science Textbooks. *Journal of The Korean Association For Science Education*, 39(3), 446-456.
- Nugroho, A. D. (2010). Mathematics Textbooks of Primary 1 Used in Singapore: A Multimodal Analysis of Its Intersemiosis. *k@ ta*, 12(1), 72-91.
- OCDE. (2004). *Learning for Tomorrow's World: First Results from PISA 2003*. Francia: OECD Publishing.
- OCDE. (2008). *Informe PISA 2006. Competencias científicas para el mundo del mañana*. España: Santillana.
- OCDE. (2010a). *PISA 2009 Results: Learning Trends*. Francia: OECD Publishing.
- OCDE. (2010b). *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do*. Francia: OECD Publishing.
- OCDE. (2013). *PISA 2012 Results in Focus*. Francia: OECD Publishing.
- OCDE. (2016a). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework*. Francia: OECD Publishing.
- OCDE. (2016b). *PISA 2015 Resultados Clave*. Francia: OECD Publishing.
- OCDE. (2016c). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. Francia: OECD Publishing.

- OCDE. (2016d). *TALIS - The OECD Teaching and Learning International Survey*. Recuperado de <http://www.oecd.org/edu/school/talis.htm>
- OCDE. (s.f.). *PISA FAQ*. Recuperado de <http://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/pisafaq.htm>
- OCDE y INEE. (2013). *Estímulos PISA de Matemáticas liberados. Aplicación como recurso didáctico en la ESO*. España: Instituto Nacional de Evaluación Educativa.
- OCDE y UNESCO Institute for Statistics. (2003). *Literacy Skills for the World of Tomorrow. Further results from PISA 2000*. Francia: OECD Publishing.
- Olivera Lahore, C. E. (1986). *Introducción a la educación comparada*. España: UNED.
- Olsen, R. V. (2005). *Achievement tests from an item perspective: An exploration of single item data from the PISA and TIMSS studies, and how such data can inform us about students' knowledge and thinking in science*. Universidad de Oslo, Noruega.
- Olympic Council of Asia. (2016a). *Asian Games*. Recuperado de <http://www.ocasias.org/Game/GamesL1.aspx?9QoyD9QEWPeJ2ChZBk5tvA==>
- Olympic Council of Asia. (2016b). *Southeast Asian Games*. Recuperado de <http://www.ocasias.org/Game/GamesL1.aspx?SYCXGjC0df+J2ChZBk5tvA==>
- Ortiz Fernández, A. (2008). Matemática en los antiguos Egipto y Babilonia. *Alejandro Ortiz Fernández, 13*, 5-18.
- Ouellet, F. y Mayer, R. (1991). *Méthodologie de recherche pour les intervenants sociaux*. Canadá: G. Morin.
- Padrón, C. L., Doderó, J., Díaz, P. y Aedo, I. (2005). The collaborative development of didactic materials. *Comput. Sci. Inf. Syst.*, 2(2), 1-21.
- Pajares Box, R. (2005). *Resultados en España del estudio PISA 2000: conocimientos y destrezas de los alumnos de 15 años*. España: Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.
- Parcerisa Aran, A. (1996). *Materiales curriculares: cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos* Vol. 105. España: Grao.
- Park, D. W., Hong, S. S. y Sin, M. Y. (2012). High School Textbook Definition and Students' Understanding of Continuity of Functions. *Journal of the Korean School Mathematics*, 15(3), 453-465.

- Park, J.-S. y Jung, K.-M. (2010). Analyzing Experiment Illustrations and Error in Illustrations in High School Chemistry I Textbooks. *Journal of The Korean Association For Science Education*, 30(2), 181-191.
- Parliament of Singapore. (1987). *Main and development estimates of Singapore for the financial year 1st April, 1987 to 31st March, 1988*. Recuperado de <http://sprs.parl.gov.sg/search/report.jsp?currentPubID=00069533-ZZ>.
- Paulos, J. A. (2000). *El hombre anumérico*. España: Túsquets editores.
- Pearson, K. (1900). X. on the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 50(302), 157-175.
- Peirce, B. (1881). Linear Associative Algebra. *American Journal of Mathematics*, 4(1), 97-229.
- Peral Alonso, J. C. (2003). Las Matemáticas en la Naturaleza. *Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria*, 22, 161-171.
- Pérez Rodríguez, U., Álvarez Lires, M. y Serrallé marzoa, J. F. (2009). Los errores de los libros de texto de primer curso de ESO sobre la evolución histórica del conocimiento del Universo. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 109-120.
- Phang, S.-Y. (2003). Strategic development of airport and rail infrastructure: the case of Singapore. *Transport Policy*, 10(1), 27-33.
- Pichorim, S. F. y Abatti, P. J. (2013). Analysis of errors in some simplified textbook interpretations of coil coupling coefficient. *International Journal of Electrical Engineering Education*, 50(2), 127-132.
- Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro Martínez, E. (2016). Resultados PISA y resolución de problemas matemáticos en los currículos de Educación Primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(2), 50-64.
- Piñuel Raigada, J. L. (2002). Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. *Sociolinguistic Studies*, 3(1), 1-42.
- Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, 35(4), 1-14.
- Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton university press.

- Postiglione, G. A. y Tan, J. (2007). *Going to school in East Asia*. Westport, CT: Greenwood Publishing Group.
- Primary Education Review and Implementation Committee. (2009). *Report of the Primary Education Review and Implementation Committee*. Recuperado de http://planipolis.iiep.unesco.org/upload/Singapore/Singapore_PERI_2009.pdf.
- Prince, M. J. y Felder, R. M. (2006). Inductive teaching and learning methods: Definitions, comparisons, and research bases. *Journal of Engineering Education*, 95(2), 123-138.
- Puget, M. (1963). Le livre scolaire. *Tendances*, 22(abril), 212-230.
- Puig Adam, P. (1985). Enseñanza heurística de la matemática. En J. M. Benavente Barreda, M. J. Palacios de Burgos y M. D. de Prada Vicente (Eds.), *Didáctica de las matemáticas. Volumen 7 de Publicaciones de la Nueva Revista de Enseñanzas Medias*. España: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Raghubar, K., Cirino, P., Barnes, M., Ewing-Cobbs, L., Fletcher, J. y Fuchs, L. (2009). Errors in multi-digit arithmetic and behavioral inattention in children with math difficulties. *Journal of learning disabilities*, 42, 356-371.
- Raiteri, A. C. y Cambini, R. (2004). Fractals as a didactic material. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 14, 160-167.
- Raphael, D. y Wahlstrom, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 173-190.
- Real Academia Española. (2014). Diccionario de la lengua española (23.^a ed.). Recuperado de <http://dle.rae.es/?id=G47B9qL>
- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 52, de 1 de marzo de 2014, Pages
- Reilly, B. (2007). Electoral systems and party systems in East Asia. *Journal of East Asian Studies*, 7(2), 185-202.
- Renkl, A., Stark, R., Gruber, H. y Mandl, H. (1998). Learning from Worked-Out Examples: The Effects of Example Variability and Elicited Self-Explanations. *Contemporary Educational Psychology*, 23, 90-108.
- Restrepo, B. (1993). *La investigación sobre el uso del texto escolar: estado del arte y perspectivas*. Colombia: Secretaría Ejecutiva del Convenio Andrés Bello. Programa de materiales educativos.

- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rico Romero, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rita Otero, M. (1999). Psicología cognitiva, representaciones mentales e investigación en enseñanza de las ciencias. *Investigações em Ensino de Ciências*, 4(2), 93-119.
- Rodan, G. (1998). The Internet and political control in Singapore. *Political Science Quarterly*, 113(1), 63-89.
- Rodríguez, C. I. y Sarmiento, A. (2002). El tangram y el plegado: dos recursos pedagógicos para aproximarse a la enseñanza de las fracciones propias. *Revista EMA*, 7(1), 84-100.
- Rodríguez Diéguez, J. L. (1983). Evaluación de textos escolares. *Revista de investigación educativa, RIE*, 1(2), 259-279.
- Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J. y García Jiménez, E. (1996). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. España: Aljibe.
- Rodríguez Sosa, J. A. (2010). *El planteamiento de la investigación*. Perú: Universidad San Ignacio de Loyola.
- Romero, N. (2012). *Redefiniciones del uso del texto escolar en un escenario de transición cultural*. Paper presentado en Jornadas de jóvenes investigadores en educación, Buenos Aires, Argentina.
- Ruiz de Gauna Gorostiza, J., Dávila Balsera, P., Etxeberria Murgiondo, J. y Sarasua Fernández, J. (2013). Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970-2005. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(2), 245-276.
- Ruiz, R. y Zamora, M. (2012). Enseñar a demostrar aplicando la inducción completa: algunas recomendaciones metodológicas. *Revista Electrónica EduSol*, 10(31), 1-11.
- Ruiz Rosillo, M. A., De Esteban Villar, M. y Sancho Gargallo, M. Á. (2016). *Indicadores comentados sobre el sistema educativo español*. Madrid: Editorial Centro de Estudios Ramón Areces S. A.
- Sablić, M., Rački, Ž. y Lesandrić, M. (2015). Teachers' and Students' Evaluation of Selected Didactic Materials According to the Maria Montessori Pedagogy. *Hrvatski časopis za odgoj i obrazovanje*, 17(3), 755-782.

- Samuelson, P. A., Nordhaus, W. D., Rabasco, E. y Toharia, L. (2001). *Economía*. España: McGraw-Hill, Interamericana de España.
- Sanderson, G. (2002). International education developments in Singapore. *Internacional Education Journal*, 3(2), 85-103.
- Santos Trigo, L. M. (1996). *Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas* G. E. Iberoamérica Ed. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.
- Sclafani, S. (2008). *Rethinking Human Capital in Education: Singapore as a Model for Teacher Development* (Working paper.
- Schochet, P. Z. y Chiang, H. S. (2010). *Error Rates in Measuring Teacher and School Performance Based on Student Test Score Gains*. Washington D. C., WA: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). Reino Unido: Macmillan.
- Schworm, S. y Renkl, A. (2002). Learning by solved example problems: Instructional explanations reduce self-explanation activity. *Proceedings of the Annual Conference-Cognitive Science Society* (pp. 816-821). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Sen, S. y Samanta, T. K. (2015). Content Knowledge and Pedagogical Content Knowledge in the seventh grade mathematics textbook of West Bengal Board of Secondary Education. *International Journal of Multidisciplinary Research and Development*, 2(9), 36-40.
- Sim, C. (2014). *Singapore's national flag*. Recuperado de http://eresources.nlb.gov.sg/infopedia/articles/SIP_488_2004-12-18.html?s=flag
- Singapore Arms and Flag and National Anthem Rules, Rev. ed. Cap 296, s. 2 (2004).
- Smith, P. L. y Ragan, T. J. (1999). *Instructional design*. Nueva York, NY: Wiley New York.
- Soriano, R. R. (2006). *Guía para realizar investigaciones sociales*. México: Plaza y Valdés.
- Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 498-505.
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Reino Unido: Sage.

- Steiner, L. (2010). *Using Competency-Based Evaluation to Drive Teacher Excellence: Lessons from Singapore*. Chapel Hill, NC: Public Impact.
- Stemler, S. (2001). An overview of content analysis. *Practical assessment, research & evaluation*, 7(17), 137-146.
- Stenlund, S. (2014). *The Origin of Symbolic Mathematics and the End of the Science of Quantity*. Suecia: Uppsala University.
- Suydam, M. N. (1986). Manipulative materials and achievement. *Arithmetic Teacher*, 33(6), 10-32.
- Swee-Hock, S. (2012). *The population of Singapore*. Singapur: Institute of Southeast Asian Studies Publishing.
- Tan, C. H. P. y Abbas, D. (2009). The 'Teach Less, Learn More' initiative in Singapore: New pedagogies for Islamic religious schools? *KEDI Journal of Educational Policy*, 6(1), 25-39.
- Tan, Y. K., Chow, H. K. y Goh, C. (2008). *Examinations in Singapore: Change and continuity (1891-2007)*. River Edge, NJ: World Scientific.
- Tay, L. Y., Lim, S. K., Lim, C. P. y Koh, J. H. L. (2012). Pedagogical approaches for ICT integration into primary school English and mathematics: A Singapore case study. *Australasian Journal of Educational Technology*, 28(4), 740-754.
- Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. España: Paidós.
- Thirunavukkarasu, M. y Senthilnathan, S. (2014). Effectiveness of bar model in enhancing the learning of Mathematics at primary level. *International Journal of Teacher Educational Research*, 3(1), 15-22.
- Torres Santomé, J. (1994). *Globalización e interdisciplinariedad: el curriculum integrado*. España: Morata.
- U.S. Department of Education y National Center for Education Statistics. (2000). *Mathematics and Science in the Eighth Grade: Findings from the Third International Mathematics and Science Study*. Washington D.C., WA: U.S. Government Printing Office.
- Uhlik, K. S. (2004). Midnight at the IDL: Student confusion and textbook error. *Journal of Geography in Higher Education*, 28(2), 197-207.
- UNESCO. (2005). *A comprehensive strategy for textbooks and learning materials*. Francia: UNESCO.

- Urbano Ruiz, S., Fernández Bravo, J. A. y Fernández Palop, P. (2016a). El método Singapur, en primaria. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 74, 55-61.
- Urbano Ruiz, S., Fernández Bravo, J. A. y Fernández Palop, P. (2016b). El modelo de barras: una estrategia para resolver problemas de enunciado en Primaria. *Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología*, 3(1), 23-37.
- Urbano Ruiz, S., Fernández Palop, P. y Caballero García, P. A. (2016). *Towers: the number as a product. A didactic model inspired in Singapore and Cuisenaire*. Paper presentado en 9th annual International Conference of Education, Research and Innovation, Sevilla, España.
- Vaish, V. y Tan, T. K. (2008). *Language and social class: Linguistic capital in Singapore*. Paper presentado en Annual meeting of the American Educational Research Association, Nueva York, NY.
- Varela Mallou, J. (2008). *El Libro de Texto ante la Incorporación de las TIC a la Enseñanza*. España: Universidad de Santiago de Compostela.
- Vásquez Alberto, E. (2012). *Medición del impacto del libro de texto en el aula de clases*. (Doctorado en Educación). University of Flensburg, Alemania.
- Vélez, E., Schiefelbein, E. y Valenzuela, J. (1995). Factores que afectan el rendimiento académico en la educación primaria. *Revista latinoamericana de Innovaciones Educativas*, 6(17), 29-57.
- Vella, F. (1995). Textbook errors: a thing of the past? *Biochemical Education*, 23(4), 183-184.
- Vidal Ledo, M., Nolla Cao, N. y Diego Olite, F. (2009). Plataformas didácticas como tecnología educativa. *Educación Médica Superior*, 23(4), 261-271.
- Vílchez González, J. M., López Serrano, C. J., Reyes Camacho, M. y Carrillo-Rosúa, J. (Febrero 2010). *Conflictos conceptuales entre masa y cantidad de sustancia*. Paper presentado en II Congrés Internacional de DIDÀCTIQUES, Girona.
- Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der mathematik*, 83(1), 20-25.
- Wang-Iverson, P., Myers, P. y Edmund Lim, W. K. (2009). Beyond Singapore's mathematics textbooks. *American Educator, Winter 2009-2010*, 28-38.
- Wang, J. (2001). TIMSS primary and middle school data: Some technical concerns. *Educational Researcher*, 30(6), 17-21.

- Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M. y Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 89(1), 41-65.
- Wolf, R. M. (1995). *The IEA Reading Literacy Study: Technical report*. Holanda: IEA.
- Xinming, Z. y Simon, H. A. (1987). Learning mathematics from examples and by doing. *Cognition and Instruction*, 4, 137-166.